Composante connexe du neutre

861 **Déf** Soit G un groupe topologique d'élément neutre e.
G° est la composante connexe de e dans G.

862 **lemme** Une composante connexe est toujours fermée.

Preuve Soit X un espace topologique. Soit C une composante connexe dans X.
On veut MQ $\overline{C}$ est connexe. Soit φ une fonction continue de $\overline{C}$ dans $\{0,1\}$.
Par connexité de C on a $\varphi_{/C}$ constante. Notons c sa valeur.
Soit $x \in \overline{C}$. On pose $a = \varphi(x)$. $\{a\}$ est alors un ouvert de $\{0,1\}$.
Par con ité de φ en x il existe donc un ouvert U de X tel que $x \in U$ et $\varphi(U) \subset \{a\}$. Puisque $x \in \overline{C}$, $U \cap C \neq \emptyset$. Soit $y \in U \cap C$.
D'une part $\varphi(y) = a$ car $y \in U$, d'autre part $\varphi(y) = c$ car $y \in C$. Donc $a = c$.
Donc $\varphi(\overline{C}) = \{c\}$ soit φ constante. D'où la connexité de $\overline{C}$.
Ainsi $\overline{C}$ est un connexe contenant e, donc néc $\overline{C} \subset C$ a $C \subset \overline{C}$ d'où $C = \overline{C}$.
Ainsi C est fermée

863 **Pté** Soit G un groupe topologique.
G° est un sous-groupe fermé et distingué de G.
De plus il est contenu dans tout sous-groupe ouvert de G.

Preuve
- D'après le lemme G° est fermé en tant que composante connexe (de e).
- Soit $x \in G^\circ$. $x^{-1}G^\circ = \delta_{x^{-1}}(G^\circ)$ est connexe en tant qu'image continue d'un connexe.
De plus $e = x^{-1}x \in x^{-1}G^\circ$, on en déduit $x^{-1}G^\circ \subset G^\circ$.
En particulier $x^{-1} = x^{-1}e \in G^\circ$ soit G° stable par inverse.
Cela montre aussi la stabilité par produit de G° : en effet si $(x,y) \in G^\circ$
$xy \in x\,G^\circ = (x^{-1})^{-1}G^\circ \underset{\text{car } x^{-1} \in G^\circ}{\subset} G^\circ$. Enfin $e \in G^\circ$. On en déduit que G° est bien un sous-grpe.

- Soit $x \in G$. $x^{-1} G^0 x = \delta_{x^{-1}} \circ \gamma_x (G^0)$ est connexe en tant qu'image continue d'un connexe. Or $e = x^{-1} e x \in x^{-1} G^0 x$, donc $x^{-1} G^0 x \subset G^0$. D'où G^0 distingué
- Soit H un sous-groupe ouvert de G. On sait que H est alors aussi fermé. Ainsi H et $G \setminus H$ sont des ouverts de G. Par conséquence $G^0 = (G^0 \cap H) \sqcup (G^0 \cap G \setminus H)$ est une décomposition en deux ouverts de G^0. La connexité de G^0 assure alors la vacuité d'un des deux termes, or $G^0 \cap H$ contient e, on en déduit $G^0 \cap G \setminus H = \emptyset$ soit $G^0 \subset H$.

864 **Pté** Soit G un groupe topologique.
G localement connexe $\Rightarrow$ G^0 ouvert.

Preuve Soit $x \in G^0$. Montrons qu'il est intérieur à G^0.
Par connexité locale de G il existe U un voisinage de x dans G qui soit connexe. Montrons qu'alors $U \cup G^0$ est connexe : soit φ continue de $U \cup G^0$ dans $\{0,1\}$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Par connexité de } U & \varphi_{/U} \equiv \varphi(x) \\ \text{———————— } G^0 & \varphi_{/G^0} \equiv \varphi(x) \end{array}\right\} \to \text{donc } \varphi \text{ constante sur } U \cup G^0.$$

Ainsi $U \cup G^0$ est un connexe contenant e donc $U \cup G^0 \subset G^0$.
Donc $U \subset G^0$. D'où $x \in \text{int}(G^0)$.
On a alors $\text{int}(G^0) \subset G^0$ soit G^0 ouvert.