Analyse complexe
Amar / Matheron
éd. CASSINI

Fonctions holomorphes.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \Omega$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{C})$

92.0 **Rappels** $\mathbb{C}$ peut être vu comme un $\mathbb{R}$-EV de dimension 2.
Alors parler de différentiabilité pour f a un sens :

92.01 • f est différentiable en z_0 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{il existe } T \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \text{ et } V \text{ voisinage de } 0 \\ \forall h \in V,\ f(z_0+h) = f(z_0) + T(h) + o(|h|) \end{cases}$

92.02 • Dans ce cas T est la différentielle de f en z_0 notée $df(z_0)$.

92.03 • f est $\mathcal{C}^1$ sur Ω $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f \text{ est différentiable en tt point de } \Omega \\ df = \left(\begin{array}{l} \Omega \to \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \\ a \mapsto df(a) \end{array}\right) \text{ est continue sur } \Omega \end{cases}$

92.04 • On notera dz pour $d\,id_\Omega$ et on a $dz = \left(\begin{array}{l} \Omega \to \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \\ a \mapsto (h \mapsto h) \end{array}\right)$

$d\bar{z}$ pour $d\varphi$ où $\varphi = z \mapsto \bar{z}$ et on a $d\bar{z} = \left(\begin{array}{l} \Omega \to \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \\ a \mapsto (h \mapsto \bar{h}) \end{array}\right)$

92.1 **Déf** f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 $\Leftrightarrow$ $\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$ existe dans $\mathbb{C}$

Dans ce cas on note $f'(z_0)$ cette limite

92.2 **Pté** f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\begin{cases} f \text{ est différentiable en } z_0 \\ df(z_0) \text{ est une similitude directe ie } \exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ tq } df(z_0) = h \mapsto \lambda h \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ (3) $\begin{cases} f \text{ est différentiable en } z_0 \\ df(z_0) \text{ est } \mathbb{C}\text{-linéaire} \end{cases}$

Et dans ce cas $df(z_0) = h \mapsto f'(z_0)h$.

Preuve (2) $\Leftrightarrow$ (3). En effet la multiplication par un scalaire est néc $\mathbb{C}$-linéaire par distributivité et commutativité et réc. une applica° $\mathbb{C}$-linéaire sur $\mathbb{C}$ qui est $\mathbb{C}$-EV de dim 1 est la multiplica° par un scalaire ie un cpla.

(2)⇒(1) Supposons f différentiable en z_0 et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $df(z_0) = h \mapsto \lambda h$.
Alors par définition il existe un voisinage V de 0 tel que
$\forall h \in V \quad f(z_0+h) = f(z_0) + \lambda h + o(h)$
dc $\forall h \in V \setminus \{0\} \quad \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lambda + o(1)$
donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lambda$ donc f est $\mathbb{C}$-dérivable et $f'(z_0) = \lambda$.

(1)⇒(2) Réciproquement si f est $\mathbb{C}$-dérivable on a par déf $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0)$
donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(z_0+h) - f(z_0) + h f'(z_0)\right) = 0$
donc $f(z_0+h) - f(z_0) + h f'(z_0)$ est un $o(h)$.
donc $f(z_0+h) = f(z_0) + h f'(z_0) + o(h)$. et $h \mapsto f'(z_0) h \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$
Ainsi f est bien différentiable en z_0 et $df(z_0) = h \mapsto f'(z_0) h$ est bien une multiplicat° par un complexe.

92.3 **Cor 1** $\mathbb{C}$ dérivable ⇒ différentiable

92.4 **Cor 2** Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tt p. ~~Ω~~
alors $df = f' \, dz$ ie $\forall a \in \Omega \quad df(a) = f'(a)\, dz = h \mapsto f'(a) h$.

92.5 **Déf** f est holomorphe sur Ω. ⇔ $\begin{cases} f \text{ est } \mathbb{C} \text{ d} \quad \text{le} \quad \text{n tt pt de } \Omega \\ \text{et } f \text{ sa dérivée est continue} \end{cases}$

⇔ $\begin{cases} f \text{ est } \mathbb{C}\text{-dérivable en tt point} \\ \text{et } f \text{ est } \mathcal{C}^1 \end{cases}$

En effet si f est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω on a d'après le cor 2 $df = f' dz$ et alors
f est $\mathcal{C}^1 \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} df$ est continue sur $\mathbb{C} \Leftrightarrow f'$ continue sur $\mathbb{C}$

92.1

On introduit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+iy \in \Omega\}$, $\tilde{f} = \begin{pmatrix} \Delta \to \mathbb{C} \\ (x,y) \mapsto f(x+iy) \end{pmatrix}$,
$u = Re(\tilde{f})$, $v = Im(\tilde{f})$, $x_0 = Re(z_0)$, $y_0 = Im(z_0)$.

92.6 **Cor 3** f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{f} \text{ est différentiable en } (x_0, y_0) \\ \bullet \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \bullet \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases}$ Conditions de Cauchy.

Preuve $\Rightarrow$ Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 elle est à fortiori différentiable en z_0,
alors $\forall h \in \mathcal{V}(0)$ $f(z_0+h) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(h)$
donc $\forall (x,y) \in \mathcal{V}(0,0)$ $\tilde{f}(x_0+x, y_0+y) = \tilde{f}(x_0,y_0) + f'(z_0)(x+iy) + o(\|(x,y)\|)$

- En prenant la partie réelle on a $u(x_0+x, y_0+y) = u(x_0,y_0) + Re(f'(z_0))x - Im(f'(z_0))y + o(\|(x,y)\|)$
  Comme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto Re(f'(z_0))x - Im(f'(z_0))y \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$
  $\therefore$ u est différentiable en z_0 et on a $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = Re(f'(z_0))$ et $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -Im(f'(z_0))$
- En prenant la partie imaginaire on a $v(x_0+x, y_0+y) = v(x_0,y_0) + Im(f'(z_0))x + Re(f'(z_0))y + o(\|(x,y)\|)$
  Comme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto Im(f'(z_0))x + Re(f'(z_0))y \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$
  v est différentiable en z_0 et on a $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = Im(f'(z_0))$ $\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) = Re(f'(z_0))$

$\hookrightarrow$ Donc $\tilde{f} = u + iv$ est différentiable en z_0
et $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$ $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$

$\Leftarrow$ Réciproquement si $\tilde{f}$ est différentiable en (x_0,y_0) et vérifie les conditions de Cauchy.
$\forall (x,y) \in \mathcal{V}(0,0)$ $\tilde{f}(x_0+x, y_0+y) = \tilde{f}(x_0,y_0) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0,y_0)x + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0,y_0)y + o(x,y)$
Or $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0,y_0)x + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0,y_0)y = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)}_{= -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)}\right)x + \left(\underbrace{1}_{= -i \cdot i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + i\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)}_{= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)}\right)y$

$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(x+iy) + \left(-i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\right)(x+iy)$

Donc $\forall h \in \mathcal{V}(0)$ $f(z_0+h) = f(z_0) + \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\right)}_{} h + o(h)$
$\hookrightarrow$ $df(z_0)$ est bien une mult par un scalaire.

Donc d'après la pté préc f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0.