Théorème d'Abel et théorèmes taubériens

On s'intéresse ici à une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R=1$. et à sa somme $f = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{\mathbb{C}}(0,R) \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum a_n z^n \end{pmatrix}$.

On a déjà la continuité de f sur le disque ouvert de convergence et le théorème d'Abel apporte une réponse à la question : peut-on étendre cette continuité sur un point du cercle où la série converge ?

93.1 **Théorème d'Abel** $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \forall \theta_0 \in [0,\pi/2[\quad \lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

où $\Delta_{\theta_0} = \{1-\rho e^{i\theta} \mid \rho \in \mathbb{R}^{+*}, \theta \in [-\theta_0,\theta_0] \text{ et } |1-\rho e^{i\theta}| < 1\}$

cf. Gourdon Analyse p 252 (ds la $2^{\text{ème}}$ éd).

Rq Une version plus forte (R quelconque, 1 remplacé par z_0 quelconque sur le cercle et résultat de continuité uniforme sur Δ_{θ_0}) est donné dans le Zuily-Queffelec p 42-43 ($4^{\text{ème}}$ éd).

Preuve On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et pour $n \in \mathbb{N}$ $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = R_{n-1} - R_n$.
Soit $z \in \mathcal{B}(0,1)$. Soit $N \in \mathbb{N}$. On va effectuer une transformée d'Abel :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N} a_n &= \sum_{n=0}^{N} a_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1) \\
&= R_0 (z-1) + \sum_{n=1}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_N (z^N - 1) \\
&= (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N (z^N - 1)
\end{aligned}$$

Or $R_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$ en tant que reste d'une série convergente et $(z^n - 1)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée par 2

Donc en passant à limite quand $N \to +\infty$ on obtient

$$\forall z \in \mathcal{B}(0,1) \quad f(z) - S = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n (z-1)$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N \; |R_n| < \varepsilon$

Alors $\forall z \in \mathcal{B}(0,1)$

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \sum_{n=0}^{+\infty} |R_n| |z|^n$$

$$= |z-1| \Big(\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} |R_n| \underbrace{|z|^n}_{\leq 1}}_{:= C_\varepsilon} + \sum_{n=N}^{+\infty} \underbrace{|R_n|}_{<\varepsilon} |z|^n \Big)$$

$$\leq |z-1| \Big(C_\varepsilon + \varepsilon \sum_{n=N}^{+\infty} |z|^n \Big)$$

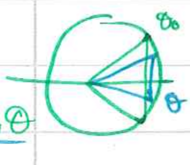
$$\leq |z-1| \Big(C_\varepsilon + \varepsilon \frac{1}{1-|z|} \Big)$$

Pour faire tendre $z \to 1$, le quotient $\frac{|z-1|}{1-|z|}$ pose problème.

On commence donc ici à utiliser Δ_{θ_0} pour $\theta_0 \in [0, \pi/2[$. Soit $z = 1 - \rho e^{i\theta} \in \Delta_{\theta_0}$.

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|} \times \frac{1+|z|}{1+|z|} = \rho \frac{1+|z|}{1-|z|^2} \leq \frac{2\rho}{1-|z|^2}$$

Or $|z|^2 = (1-\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2 = 1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2 \underbrace{(\cos\theta^2 + \sin\theta^2)}_{=1}$



Donc $\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2\rho}{+2\rho\cos\theta - \rho^2} = \frac{2}{2\cos\theta - \rho} \leq \frac{2}{2\cos\theta_0 - \rho}$ car $\cos\theta_0 \leq \cos\theta$

Donc pour $|z-1| \leq \min(\cos\theta_0, \frac{\varepsilon}{C_\varepsilon})$ on a $\rho \leq \cos\theta_0$ donc $\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{\cos\theta_0}$

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon \Big(1 + \frac{2}{\cos\theta_0} \Big)$$

Puisque c'est vrai pour ε quelconque on a bien montré que

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = S.$$

⚠ Telle quelle la réciproque du théorème est fausse.

93.2 ex $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1)^n$.

$\sum (-1)^n z^n$ est de rayon de cv 1

et $\forall z \in \mathcal{B}(0,1) \; f(z) = \sum (-1)^n z^n = \sum (-z)^n = \frac{1}{1+z}$.

$\forall \theta_0 \in [0, \pi/2[\; \lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$ pourtant $\sum (-1)^n$ diverge.

Cela motive l'introduction des th. taubériens qui donnent des pseudos-réciproques au th. d'Abel.

93.1

93.3 Exemples d'utilisation du théorème d'Abel

- Calcul $\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

$\rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente d'après le critère spécial des séries alternées (CSSA)

$\rightarrow$ D'après le théorème d'Abel on a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in [0,1[}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} = \lim_{z \to 1} \ln(1+z) = \ln(2)$$

- Calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

$\rightarrow$ Cette série est cv d'après le CSSA

$\rightarrow$ D'après Abel $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in [0,1[}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{z \to 1} \arctan(z) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

(rq ici formellement $a_n = \frac{(-1)^p}{n}$ si $n = 2p+1$, 0 sinon)

Une première pseudo-réciproque est le théorème suivant.

93.4 **Théorème taubérien faible** $\left[\begin{array}{l} |a_n| = o(1/n) \\ \lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in]0,1[}} f(z) = S \end{array}\right\} \Rightarrow \sum a_n z^n$ converge vers S

cf Gourdon Analyse p253 (2ème éd) + K. Madère dév. d'analyse p197.

Preuve Notez l'astuce : $(1-z^k) = (1-z)(1+z+z^2+\dots+z^{k-1})$ pour $k \geq 1$.

Soit $z \in]0,1[$. Soit $N \in \mathbb{N}$. On note $S_N = \sum_{k=0}^{N} a_k$.

$$|S_N - f(z)| = \left| \sum_{k=0}^{N} a_k - \sum_{k=0}^{N} a_k z^k - \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k z^k \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| \underbrace{|1-z^k|}_{= \left|(1-z) \times \sum_{i=0}^{k-1} z^i\right|} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} |a_k z^k|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N} |1-z|\, |a_k| \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{|z|^i}_{\leq 1}}_{\leq k} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} k \times \underbrace{\frac{1}{k}}_{\leq \frac{1}{N}} \times |a_k| \times |z|^k$$

$$\leq |1-z| \sum_{k=0}^{N} k|a_k| + \frac{1}{N} \sum_{k=N+1}^{+\infty} k|a_k|\, |z|^k.$$

On utilise alors l'hypothèse forte $|a_n| = o\left(\frac{1}{n}\right)$ i.e. $n|a_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, d'une part pour introduire $M_N = \sup_{n \geq N} n|a_n|$ sachant que $M_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$, et d'autre part pour écrire à l'aide du théorème de Cesàro $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} k|a_k| \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. D'après ce qui précède il existe $N \in \mathbb{N}$ assez grand pour que
- $\forall n \geq N$ $M_n \leq \varepsilon/2$ et - $\forall n \geq N$ $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k|a_k| \leq \varepsilon/2$.

On a alors $\forall n \geq N$ $|S_n - f(1-\frac{1}{n})| \leq |1-(1-\frac{1}{n})| \sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \underbrace{k|a_k|}_{\leq M_n} |z|^k$ car $1-\frac{1}{n} \in]0,1[$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{1}{n} M_n \sum_{k=0}^{+\infty} z^k$$

$$\leq \varepsilon/2 + \frac{1}{n} M_n \underbrace{\frac{1}{1-z}}_{= \frac{1}{1/n} = n}$$

$$\leq \varepsilon/2 + \underbrace{M_n}_{\leq \varepsilon/2}$$

$$\leq \varepsilon$$

Donc $\lim_{n \to +\infty} |S_N - f(1-\frac{1}{N})| = 0$, or $f(1-\frac{1}{N}) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \lim_{z \to 1} f(z) = S$

D'où nécessairement $S_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} S$.

93.S Théorème taubérien fort $\left[\begin{array}{l} |a_n| = O(\frac{1}{n}) \\ \lim_{z \to 1, z \in]0,1[} f(z) = S \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ cv vers S

Cf Gourdon Analyse p293. c'est une preuve assez différente qui utilise entre autre l'approximation par des polynômes (th de Weierstraß). + compliqué et + long.

Rq D'autres versions sont données dans oraux x-ens analyse 2
pr Abel p 180
pr les taubériens p 222