Dénombrement des matrices de rang r sur un corps fini

Réf : Caldero-Germoni (H_2G_2). Tome 1

Leçons 150, 151, 190 pour les I, 104 ?
101, 150, 151, 190 pour les non I.
Bof 123 car peu d'arguments de corps finis.

Pté Soit n, m, r trois entiers positifs tels que $n>0, m>0, r<\min(m,n)$.
Notons $A_r = \{M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F}_q) \mid \mathrm{rang}(M) = r\}$.
On a alors $|A_r| = \prod_{d=0}^{r-1} \frac{(q^m - q^d)(q^n - q^d)}{(q^r - q^d)}$

Plan : 1) MQ A_r est une orbite sous une action que l'on introduira, dite action de Steinitz.

2) Sachant que si $G \curvearrowright X$ et $x \in X$, alors $\underbrace{\Omega x}_{\text{orbite de } x} \underset{bij}{\simeq} G/\mathrm{Stab}\, x$
on a $|A_r| = \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}_{J_r}|}$ pour $J_r \in A_r$.

Calculons donc Stab_{J_r}.

3) Calculons encore pour conclure.

1) $\begin{pmatrix} GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{B}ij(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})) \\ (P, Q) \longmapsto (M \longmapsto PMQ^{-1}) \end{pmatrix}$ est un morph. de gp.

Donc $G = GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$ agit sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par $(P,Q) \cdot M = PMQ^{-1}$.
On appelle cette action, l'action de Steinitz.

Les classes pour cette action correspondent aux différentes façon d'écrire un même morphisme de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$ dans différentes bases.

(Plus exactement si on fixe $\mathcal{B}_1$ base de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}_2$ base de $\mathbb{K}^m$, on peut voir $P \in GL_m(\mathbb{K})$ comme une matrice de passage d'une base $\mathcal{B}_2'$ à $\mathcal{B}_2$
$Q^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ ——— de $\mathcal{B}_1$ à une base $\mathcal{B}_1'$
alors si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}\, \varphi$ et $A = PBQ^{-1}$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1', \mathcal{B}_2'}\, \varphi$.)

En particulier si $A \simeq B$ il est clair qu'elles ont m̂ rang, celui d'une application qu'elles dénotent.

On pouvait aussi, du point de vue matriciel, dire que multiplier à gauche ou à droite par une mat. inversible n'affecte pas le rang.

Réciproquement si $rg(A) = rg(B) = r$ on veut MQ $A \simeq B$.

On va plutôt MQ $A \simeq J_r := \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. où $I_r := \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$

puisque de m̂ on aura $B \simeq J_r$ et par symétrie puis transitivité $A \simeq B$.

On introduit φ_A tq $A = \mathrm{Mat}_{\text{Base canonique}} \varphi_A$.

On peut décomposer $\mathbb{K}^n = F \oplus \mathrm{Ker}\, A$
$= F \oplus \mathrm{Ker}\, \varphi_A$. (existence par le th. de la base incomplète à partir d'une base de Ker A)

Ainsi $\varphi_{A/F}$ est injective (☆).

Considérons $(v_i)_{i \in [1..n]}$ une base adaptée à cette décomposition et disons que $F = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$.

On pose alors $(w_1 — w_s) = (\varphi_A(v_1) — \varphi_A(v_s))$.

Par ☆, $(w_1 - w_s)$ est libre, on la complète en $(w_1 — w_m)$ base de $\mathbb{K}^m$.

On a $r = rg(A) = rg(\varphi_A) = \dim(\varphi_A(E)) = \dim(\varphi_A(F)) \overset{☆}{=} \dim(F) = s$.

Donc $\forall i \in [1..r]\ \varphi_A(v_i) = w_i$
$\forall i \in [r+1..s]\ \varphi_A(v_i) = 0$

Donc $\mathrm{Mat}_{v,w} \varphi_A = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = J_r$.

D'où $\underline{A \simeq J_r}$ « <u>les orbites de l'ac° de Steinitz sont caractérisés par le rg.</u> »

2) Quitte à calculer le stabilisateur d'un élément on choisit de calculer celui de J_r qui est plus simple.

$(P,Q) \in \mathrm{Stab}\, J_r$ ssi $P J_r Q^{-1} = J_r$ ssi $P J_r = J_r Q$

ssi $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right)$) en notant $P = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ $Q = \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right)$

ssi $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ssi $A = A'$, $B' = 0$, $C = 0$

Donc $\mathrm{Stab}\, J_r = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C' & D' \end{array}\right) \mid A \in GL_r(\mathbb{K}),\ D \in GL_{m-r}(\mathbb{K}),\ D' \in GL_{n-r}(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{r,m-r}(\mathbb{K}),\ C' \in \mathcal{M}_{m-r,r}(\mathbb{K}) \right\}$

3) Ramenons nous au cas $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ car alors on a $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{d=0}^{n-1} (q^n - q^d)$ (choix de chacune des colonnes, non colinéaires aux d premières)

Donc $|A_r| = |\Omega_{J_r}| = \dfrac{|G|}{|\mathrm{Stab}_{J_r}|} = \dfrac{|GL_n(\mathbb{F}_q)| \times |GL_m(\mathbb{F}_q)|}{|GL_r(\mathbb{F}_q)| \times |GL_{m-r}(\mathbb{F}_q)| \times |GL_{n-r}(\mathbb{F}_q)| \times q^{r \times (m-r)} \times q^{(n-r) \times r}}$

$$= \frac{\prod_{d=0}^{n-1}(q^n - q^d) \times \prod_{d=0}^{m-1}(q^m - q^d)}{\prod_{d=0}^{r-1}(q^r - q^d) \times \underbrace{(q^r)^{m-r} \times \prod_{d=0}^{m-r-1}(q^{m-r} - q^d)}_{= \prod_{d=0}^{m-r-1}(q^m - q^{d+r}) = \prod_{d=r}^{m-1}(q^m - q^d)} \times \underbrace{(q^r)^{n-r} \times \prod_{d=0}^{n-r-1}(q^{n-r} - q^d)}_{= \prod_{d=0}^{n-r-1}(q^n - q^{d+r}) = \prod_{d=r}^{n-1}(q^n - q^d)}}$$

$$= \frac{1}{\prod_{d=0}^{r-1}(q^r - q^d)} \times \prod_{d=0}^{r-1}(q^m - q^d) \times \prod_{d=0}^{r-1}(q^n - q^d)$$

$$= \prod_{d=0}^{r-1} \frac{(q^m - q^d)(q^n - q^d)}{(q^r - q^d)}$$