Feuille d'exercices n°8 - Relations d'ordre

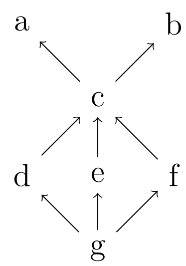
Notions abordées

- quelques exemples de relations d'ordre classiques
- représenter graphiquement un ensemble ordonné fini
- identifier, s'ils existent, les élément minimaux/maximaux, les plus petits/plus grands éléments
- identifier l'ensemble des minorants/majorants, et si elle existe la borne inférieure/supérieure
- mener quelques preuves de propriétés génériques à partir des définitions du cours

Exemples de relations d'ordre

Exercice 1 Exemple sur un diagramme

On considère l'ensemble $X = \{\text{a, b, c, d, e, f, g}\}$.
On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des couples $(x, y) \in X^2$ tels qu'une flèche va de x vers y sur le diagramme ci-contre, *i.e.* $\mathcal{R} = \{(g, d), (g, e), (g, f), (d, c), (e, c), (f, c), (c, a), (c, b)\}$.



Question 1
La relation $\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? symétrique ? anti-symétrique ? transitive ?

Question 2
Décrire explicitement $\mathcal{R}^2$, *i.e.* $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$, puis $\mathcal{R}^3$ et $\mathcal{R}^4$.

Question 3
Quelle est la clôture transitive de $\mathcal{R}$? Quelle est la plus petite relation d'ordre sur X^2 contenant $\mathcal{R}$.
On note $\leqslant_X$ cette relation d'ordre.

Question 4
X admet-il des éléments minimaux ? maximaux ? Si oui lesquels ?
X admet-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Si oui lesquels ?
Donner l'ensemble des majorants de X. X admet-il une borne supérieure ?
Donner l'ensemble des minorants de X. X admet-il une borne inférieure ?

Question 5
On note $A = \{\text{c, d, e}\}$ (en tant que sous ensemble de $(X, \leqslant_X)$ A est implicitement muni de l'ordre induit par $\leqslant_X$ sur A).
A admet-il des éléments minimaux ? maximaux ? Si oui lesquels ?
A admet-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Si oui lesquels ?
Donner l'ensemble des majorants de A. A admet-il une borne supérieure ?
Donner l'ensemble des minorants de A. A admet-il une borne inférieure ?

Exercice 2 La relation divise sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

Dans cet exercice on travaille dans $X = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, muni de la relation $|$ (divise).

Question 1
Vérifier que $|$ définit bien une relation d'ordre sur X.

Question 2
La relation $|$ est-elle une relation d'ordre totale sur X.
Si oui, le démontrer, si non, donner un contre-exemple.

Question 3
Donner A l'ensemble des minorants de $\{12\}$. Représenter $(A, |)$ par un diagramme.
A admet-il des éléments minimaux ? maximaux ? Si oui lesquels ?
A admet-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Si oui lesquels ?
Donner l'ensemble des majorants/minorants de A. A admet-il une borne supérieure/inférieure ?

Question 4
Donner B l'ensemble des majorants de $\{12\}$. Représenter $(B, |)$ par un diagramme.
B admet-il des éléments minimaux ? maximaux ? lesquels
B admet-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ?
Donner l'ensemble des majorants/minorants de B. B admet-il une borne supérieure/inférieure ?

Question 5
Pour $n \in X$, quel est l'ensemble des minorants de $\{n\}$? et celui de ses majorants ?
Quels sont les éléments minimaux et maximaux de ces ensembles ?

Question 6
Donner C l'ensemble des minorants de $\{28, 36\}$. Représenter $(C, |)$ par un diagramme.
C admet-il des éléments minimaux ? maximaux ? lesquels
C admet-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ?
Donner l'ensemble des majorants/minorants de C. C admet-il une borne supérieure/inférieure ?

Question 7
Pour $(n, m) \in X^2$, quel est l'ensemble des minorants de $\{n, m\}$? et celui de ses majorants ?

Exercice 3 Isomorphismes

On appelle **isomorphisme** entre deux ensembles ordonnés une bijection qui est croissante et dont la réciproque est aussi croissante.

Question 1
On note $A = \mathcal{P}(\{a, b, c\})$ et $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Donner un isomorphisme entre $(A, \subseteq)$ et $(B, |\,)$. Cet isomorphisme est-il unique, ou du moins canonique ?

Question 2
On note encore $A = \mathcal{P}(\{a, b, c\})$ et $C = \{0, 1\}^3$. De plus, on note $\leqslant_C$ l'ordre sur C obtenu par produit de $\leqslant$ sur $\{0, 1\}$. Donner un isomorphisme entre $(A, \subseteq)$ et $(C, \leqslant_C)$.
Cet isomorphisme est-il unique, ou du moins canonique ?

Quelques preuves

Exercice 4 Rendre une relation anti-symétrique

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur X.
On note $\sim$ la relation sur X définie par $\forall(x,y)\in X^2, x \sim y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$.

Question 1
À quelle condition sur R la relation $\sim$ est-elle une relation d'équivalence ?

Dans la suite de l'exercice, on suppose que R est telle que $\sim$ soit une relation d'équivalence.
On note alors $Y = X/\sim$ le quotient de X par cette relation.

Question 2
Montrer que pour $(a,b)\in Y^2$, ou bien $\forall x \in a$, $\forall y \in b$, $x\mathcal{R}y$, ou bien $\forall x \in a$, $\forall y \in b$, $x\not\mathcal{R}y$.
Autrement dit, montrer que la relation `R` ne dépend pas du représentant (au sens de $\sim$) choisi.

Question 3
Montrer que la relation $\dot{\mathcal{R}}$ définie sur Y par $\forall(\dot{x},\dot{y})\in Y^2$, $\dot{x}\dot{\mathcal{R}}\dot{y} \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$ est une anti-symétrique.

Exercice 5 Sur les ordres produit et lexicographique

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $(X_i, \leqslant_i)_{i\in[1..n]}$ une famille de n ensembles ordonnés. On note $Y = \prod_{i=1}^{n} X_i$.

Question 1
Montrer que la relation d'ordre produit des $\leqslant_i$, définie ci-dessous est une relation d'ordre sur Y.

$$\forall(a,b)\in Y^2, a \leqslant_\times b \Leftrightarrow \forall i\in[1..n], a_i \leqslant_i b_i$$

Question 2
Montrer que la relation d'ordre lexicographique sur Y, définie ci-dessous est une relation d'ordre.

$$\forall(a,b)\in Y^2, a \leqslant_{lex} b \Leftrightarrow a=b \text{ ou } \exists j\in[1..n], \Big(\forall i\in[1..j[,\ a_i=b_i \text{ et } a_j <_j b_j\Big)$$

Exercice 6 Sur la composée de relation

Question 1
Montrer que la composée de relations binaires sur un ensemble X est une opération associative. *Autrement dit, montrer que si $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ sont trois relations binaires sur un même ensemble X, alors $(\mathcal{P} \circ \mathcal{Q}) \circ \mathcal{R} = \mathcal{P} \circ (\mathcal{Q} \circ \mathcal{R})$.*

Question 2
Montrer que la composée de relations binaires sur un ensemble X admet pour élément neutre la diagonale de $X \times X$: $\mathcal{D} = \{(x,x) \mid x\in X\}$. *Autrement dit, montrer que si $\mathcal{R}$ est relation binaire sur X, alors $\mathcal{D} \circ \mathcal{R} = \mathcal{D} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}$.*