Feuille d'exercices n°9 - Induction

Notions abordées

- Définir un ensemble par induction à partir de règles de construction
- Lien entre type somme récursif en OCaml et règles de construction
- Définir une fonction sur un ensemble inductif
- Mener des preuves par induction
- Mener quelques preuves de propriétés génériques à partir des définitions du cours

Exercice 1 Quelques fonctions sur les arbres binaires

Question 1
Rappeler les règles de construction qui permettent de construire l'ensemble des arbres binaires. *On considère ici des arbres non étiquetés, et dont chaque nœud interne a exactement deux enfants.*

Question 2
Dessiner tous les arbres binaires ayant trois nœuds internes exactement.

Question 3
Définir de manière récursive la fonction qui associe à un arbre binaire son nombre de feuille (resp. de nœuds internes, de nœuds, d'arêtes).

Question 4
Quelle relation peut-on établir entre le nombre de nœuds internes et le nombre de feuilles d'un arbre binaire. Démontrer la relation proposée.

Question 5
On appelle hauteur d'un arbre le nombre maximum de nœuds internes sur une de ses branches. Définir de manière récursive la fonction qui associe à un arbre binaire sa hauteur.

Question 6
Quelle relation peut-on établir entre le nombre de nœuds d'un d'un arbre binaire et sa hauteur. Démontrer la relation proposée.

Question 7
Combien y a-t-il d'arbres binaires de hauteur $n \in \mathbb{N}$? Comment démontrer cela ? *On n'attend pas une formule explicite.*

Exercice 2 Arbres d'arité plus grande

Question 1
Donner un ensemble de règles de construction qui permettent de construire l'ensemble des arbres dont les nœuds internes sont étiquetés par des entiers et ayant 1, 2 ou 3 enfants.

Question 2
Donner une définition de type en OCaml correspondant aux règles de constructions précédentes.

Question 3
Donner la forme d'un filtrage des valeurs du type précédemment défini.

Question 4
Donner un ensemble de règles de construction qui permettent de construire l'ensemble d'arbres d'arité quelconque dont les nœuds internes sont étiquetés par des entiers.

Question 5
Donner une définition de type en OCaml pour les arbres d'arité quelconque.

Question 6
Donner la forme d'un filtrage des valeurs du type précédemment défini.

Exercice 3 Quelques preuves

Question 1
Soit $(A, \leqslant_A)$ un ensemble ordonné bien fondé. Soit $(B, \leqslant_B)$ un ensemble ordonné. Montrer que s'il existe φ une fonction strictement croissante de $(B, \leqslant_B)$ dans $(A, \leqslant_A)$, alors $(B, \leqslant_B)$ est bien fondé.

Question 2
Donner un contre-exemple à la propriété précédente dans le cas d'une fonction φ seulement croissante.

Question 3
En reprenant les notations du cours, montrer la propriété suivante.

$$\forall x \in X,\ \exists S|_P^r \in \mathcal{I},\ \exists p \in P,\ \exists (x_i)_{i\in[1..r]} \in X^r,\ x = (S, p, x_1, x_2 \ldots, x_r) \Rightarrow h(x) = 1 + \max\{h(x_i) | i \in [1..r]\}$$

Exercice 4 Ensembles de mots construits par induction

Dans cet exercice, on demande de donner les règles de construction qui permettent de définir par induction un ensemble A, mais on entend par là que l'ensemble des termes construits à partir de ces règles serait en bijection avec A.

Question 1
Donner les règles de construction qui permettent de construire l'ensemble des mots de la forme $<^n|>^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire avec n caractères $<$, un caractère $|$, et enfin n caractères $>$.

Question 2
Donner les règles de construction qui permettent de construire l'ensemble des mots de la forme $<^n|>^m$ pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, c'est-à-dire avec n caractères $<$, un caractère $|$, et enfin m caractères $>$.

Question 3
Donner les règles de construction qui permettent de construire l'ensemble des mots de la forme $<^n|>^m$ où $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n < m$.

Question 4
Donner les règles de construction qui permettent de construire l'ensemble des mots sur $\Sigma = \{a, b\}$ (qu'on notera Σ^* dans la suite de l'exercice).

Question 5
Donner la définition de l_a qui à un mot de Σ^* associe son nombre de a. Définir de même l_b.

Question 6 $\ast\ast$
Donner les règles de construction qui permettent de construire l'ensemble suivant. Justifier que votre proposition est correcte.

$$\mathcal{L} = \{u \in \Sigma^* \mid\ l_a(u) = l_b(u)+1,\ \text{et pour tout } v \text{ préfixe strict de } u,\ l_a(u) < l_b(u)+1\}$$

Question 7 $\ast$
Que représentent ces mots ? Avec quel ensemble inductif déjà vu en cours $\mathcal{L}$ est-il en bijection.