La transformée de Bargmann

ou comment voir $L^2(\mathbf{R})$ comme un espace de fonctions analytiques.

Mais si c'est bien.

Quelques pré-requis

Les *polynômes d'Hermite* sont définis sur $\mathbf{R}$ par :

$$H_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*,\ H_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1/4}\pi^{n/2}\sqrt{n!}} e^{2\pi x^2} \partial^n (e^{-2\pi x^2}).$$

Les *fonctions d'Hermite* sont définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \ h_n(x) = e^{-\pi x^2} H_n(x).$$

Proposition. *Les fonctions d'Hermite forment une base hilbertienne de* $L^2(\mathbf{R})$.

La transformée de Bargmann et l'espace du même nom

Pour tout $z \in \mathbf{C}$, et $f \in L^2(\mathbf{C})$, on définit :

$$Bf(z) := \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \langle h_n, f \rangle.$$

Comme $|\langle h_n, f\rangle| \leq \|f\|$, cela définit une fonction analytique dans tout $\mathbf{C}$ appelée *transformée de Bargmann de* f. Notons que par le théorème de Fubini, on peut écrire plus simplement :

$$\begin{aligned} Bf(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \langle h_n, f\rangle &= \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \int_{\mathbf{R}} h_n(x) f(x) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} h_n(x) \right) f(x) dx \end{aligned}$$

Entre parenthèses, c'est une série entière (avec un paramètre $x \in \mathbf{R}$) dont le terme général vaut :

$$2^{1/4} e^{\pi x^2} \frac{\left(\frac{-z}{2\sqrt{\pi}}\right)^n}{n!} \partial^n (e^{-2\pi x^2}).$$

On reconnait la série de Taylor au point x de la fonction $y \mapsto e^{-2\pi y^2}$ qui est analytique sur tout $\mathbf{C}$. Ainsi :

$$Bf(z) = \int_{\mathbf{R}} 2^{1/4} e^{\pi x^2} e^{-2\pi (x - \frac{z}{2\sqrt{\pi}})^2} f(x) dx = 2^{1/4} \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi x^2 + 2xz\sqrt{\pi} - \frac{1}{2} z^2} f(x) dx.$$

Notons que la transformée de Bargmann B est injective car :

$$Bf = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbf{N},\ \langle h_n, f\rangle \Rightarrow f = 0.$$

L'image de $L^2(\mathbf{R})$ par la transformée de Bargmann B est *l'espace de Bargmann*, noté $\mathfrak{Barg}(\mathbf{C})$ dans la suite. C'est un sous-espace de l'espace des fonctions analytiques sur tout $\mathbf{C}$. Bien évidemment :

$$B : L^2(\mathbf{R}) \to \mathfrak{Barg}(\mathbf{C})$$

est un isomorphisme qui induit une structure d'espace de Hilbert sur $\mathfrak{Barg}(\mathbf{C})$ pour laquellle B est continue. On pose pour cela :

$$\langle Bf, Bg \rangle_{\mathfrak{Barg}(\mathbf{C})} := \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbf{C})}.$$

Proposition. *L'espace* $\mathfrak{Barg}(\mathbf{C})$ *est l'espace des fonctions analytiques* $g(z) = \sum a_n z^n$ *sur tout* $\mathbf{C}$ *telles que* $\sum_{n\geq 0} n!|a_n|^2 < +\infty$.

Preuve. Si $f \in L^2(\mathbf{R})$ et $Bf(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\langle h_n, f \rangle = \sqrt{n!}\, a_n$$

et par l'égalité de Parseval, on a bien $\sum_{n\geq 0} n!|a_n|^2 < +\infty$.
Réciproquement, si $(a_n)_n$ vérifie cette condition de sommabilité, alors en posant :

$$f = \sum_{n\geq 0} \sqrt{n!}\, a_n h_n \in L^2(\mathbf{R})$$

on a bien $Bf(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathfrak{Barg}(\mathbf{C})$. $\square$

Une application : la transformée de Fourier dans l'espace de Bargmann

On note $\mathscr{F}$ la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbf{R})$ que l'on peut transporter par l'isomorphisme B en un opérateur de $\mathfrak{Barg}(\mathbf{C})$ appelé *transformée de Fourier dans l'espace de Bargmann* et noté simplement $\mathfrak{F}$. Il s'agit de faire commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbf{R}) & \xrightarrow{B} & \mathfrak{Barg}(\mathbf{C}) \\ \mathscr{F}\Big\downarrow & & \Big\downarrow\mathfrak{F} \\ L^2(\mathbf{R}) & \xrightarrow[B]{} & \mathfrak{Barg}(\mathbf{C}) \end{array}$$

Le calcul de $\mathfrak{F}(B\varphi) = B(\mathscr{F}\varphi)$ est facile lorsque $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$: il suffit d'appliquer le théorème de Fubini et de se souvenir du calcul de

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-\alpha x^2 + 2\beta x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{\alpha}}, \ \ (\alpha > 0, \ \beta \in \mathbf{C}).$$

On trouve :

$$\begin{aligned} B(\mathscr{F}\varphi)(z) &= 2^{1/4} \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi\xi^2 + 2\xi z\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}z^2} \left(\int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi x\xi} \varphi(x) dx \right) d\xi \\ &= 2^{1/4} e^{-\frac{1}{2}z^2} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} e^{-\pi\xi^2 + 2\xi(z\sqrt{\pi} - i\pi x)} d\xi \right) \varphi(x) dx \\ &= 2^{1/4} \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi x^2 + 2x(-iz)\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}(-iz)^2} \varphi(x) dx = B\varphi(-iz) \end{aligned}$$

Par densité de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ dans $L^2(\mathbf{R})$ et continuité de tous les opérateurs, le résultat subsiste pour tout $f \in L^2(\mathbf{R})$ et on trouve :

$$\forall \mathfrak{g} \in \mathfrak{Barg}(\mathbf{C}), \;\; \mathfrak{F}(\mathfrak{g})(z) = \mathfrak{g}(-iz).$$

En particulier, il devient facile de calculer $\mathscr{F}(h_n)$: dans l'espace de Bargmann, $B(h_n) = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}$, d'où :

$$\mathfrak{F}(Bh_n)(z) = (-i)^n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} = (-i)^n B(h_n)$$

et donc :

$$B^{-1}\mathfrak{F}B(h_n) = \mathscr{F}(h_n) = (-i)^n h_n$$

ce qui signifie encore que $\mathscr{F}$ est diagonalisée sur la base d'Hermite.

Référence. B. Candelpergher, *Calcul intégral*

201 Espaces de fonctions ; exemples et applications.
213 Espace de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables. *(mais si)*
243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications. *(ou pas)*
245 Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications. *(ou pas)*
250 Transformation de Fourier. Applications.