151. DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL (EN DIMENSION FINIE). RANG. EXEMPLES ET APPLICATIONS

I) Dimension

1) Familles libres et génératrices, bases

déf 1 Soit E un espace vectoriel sur K et $V = \{v_1, \dots v_n\}$ une famille de vecteurs de E. On dit que :

- V est génératrice si $E = \mathrm{Vect}(v_1, \dots v_p)$
- V est libre si $\forall (\lambda_1, \dots \lambda_p) \in K^p$, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$
- V est une base si V est libre et génératrice

rq 2 Si V n'est pas libre, on dit qu'elle est liée

ex 3
- $\{ E_{ij} \mid i, j \in [\![1, n]\!] \}$ où E_{ij} est la matrice nulle sauf en (i, j) où le coefficient vaut 1, est une base de $M_n(\mathbb{C})$
- $\{ X^i \mid i \in [\![0, n]\!] \}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
- Dans $\mathbb{R}^3$, $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (-1,3,1)$ et $v_3 = (0,-5,-2)$ sont liés car $v_1 + v_2 + v_3 = 0$
- Dans $\mathbb{R}^3$, $(1,1,0), (-1\,0\,0), (0\,1\,1)$ sont libres

rq 4 Dans $\mathbb{R}^n$, pour décider du caractère libre ou lié ou générateur d'une famille, on peut utiliser l'algorithme du pivot de Gauss.

prop 5 Toute sous famille d'une famille libre est libre
Toute sur famille d'une famille liée (resp. génératrice) est liée (resp. génératrice)

2) Dimension finie

déf 6 Un espace vectoriel est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie

ex 7 $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension finie mais pas $\mathbb{R}[X]$.

prop 8 Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie ; L une famille libre de E ; G une famille génératrice de E telle que $L \subset G$. Alors il existe B base de E telle que $L \subset B \subset G$.

cor 9 Théorème de la base incomplète :
Toute famille libre peut être complétée de façon à former une base

3) Dimension

th 10 Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont même cardinal

déf 11 On nomme dimension de l'espace vectoriel E le cardinal commun de toutes les bases de E et on le note $\dim(E)$

rq 12 Le théorème 10 et la propriété 8 assurent la bonne définition de cette quantité.

ex 13 $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$; $\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$

appli 14 Toutes les démonstrations par récurrence sur la dimension

appli 15 Algorithme de Berlekamp.
Soit $p \in \mathbb{P}$; $q = p^s$ et $P \in \mathbb{F}_q[X]$ sans facteurs carrés
Notons $x = X \bmod P$ dans $\mathbb{F}_q[X]/(P)$ dont une base est $B = (1, x, \dots x^{\deg(P)-1})$
L'algorithme suivant donne la décomposition en irréductibles de P :

1) $S_p : \begin{cases} \mathbb{F}_q[X]/(P) \longrightarrow \mathbb{F}_q[X]/(P) \\ Q \bmod P \longmapsto Q^q \bmod P \end{cases}$ est linéaire
Calculer $\mathrm{Mat}_B(S_p - Id)$
2) Le nombre n de facteurs irréductibles dans P vaut $\dim(\mathrm{Ker}(S_p - Id))$. Si $n = 1$, fini ; sinon
3) Choisir $V \in \mathrm{Ker}(S_p - Id)$ non constant modulo P
Alors $P = \prod_{a \in \mathbb{F}_q} \mathrm{pgcd}(V - a, P)$. Réappliquer l'algo sur ces facteurs

DEV 1

prop 16 Si E est un espace vectoriel de dimension n, toute famille libre de E (resp. génératrice de E) à n éléments est une base de E

4) Dimensions particulières : calcul

Ici, E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie.

prop 17 • $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$

• $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$

• en particulier, $\dim(E^*) = \dim(E)$.

• Si G est un sous espace vectoriel de E, G est de dimension finie et $\dim(G) \leq \dim(E)$.

prop 18 Formule de Grassman.

Soit E_1, E_2 deux sous espaces vectoriel de E (de dimension finie)

Alors $\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$

rq 19 En particulier, si E_1 et E_2 sont en somme directe,

$\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$

appli 20 Si E est un espace vectoriel de dimension finie,

$$E = E_1 \oplus E_2 \iff \begin{cases} E_1 \cap E_2 = \{0\} \\ \dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2) \end{cases}$$

ex 21 $M_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R})$

5) Cas des extensions de corps

def 22 Soit K et L des corps tels que $K \subset L$. On dit que L est une extension de K.

def 23 Si L est une extension de K, L est un K-espace vectoriel.

Si $\dim_K(L)$ est fini, on note cette quantité $[L:K]$ et on la nomme degré de L sur K

th 24 (base télescopique)

Si $K \subset L \subset M$ sont des corps ; $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de L sur K et $(f_j)_{1 \leq j \leq m}$ une base de M sur L alors $(e_i f_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ est une base de M sur K

cor 25 Multiplicativité des degrés

def 26 Soit $K \subset L$ et $\alpha \in L$. $\varphi_\alpha : \begin{cases} K[X] \to L \\ P \mapsto P(\alpha) \end{cases}$ est un morphisme

Si φ_α est injectif, α est transcendant sur K, sinon il est algébrique sur K et le générateur unitaire de $\ker(\varphi_\alpha)$ se nomme polynome minimal de α, noté π_α

ex 27 $\sqrt[3]{2}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ car annule $X^3 - 2$

prop 28 Soit $K \subset L$ et $\alpha \in L$.

α est algébrique sur $K \iff \dim_K K[\alpha] < \infty$.

Dans ce cas, $\dim_K K[\alpha] = \deg(\pi_\alpha)$

ex 29 $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] : \mathbb{Q}] = \deg(X^3 - 2) = 3$

appli 30 Si $K \subset L$, $\{x \in L \mid x \text{ est algébrique sur } K\}$ est un sous corps de L

II / Rang

1) Définitions

def 31 • Le rang d'une famille de vecteurs $\{v_i\}$ de E est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les v_i

• Le rang d'une matrice $A = (C_1 | C_2 \cdots | C_n)$ où les C_i sont les colonnes de A est le rang de la famille de vecteurs $\{C_i\}_i$. Il est noté $rg(A)$

• Le rang d'une application linéaire $f : E \to F$ (F de dimension finie), noté $rg(f)$ est $\dim(Im(f))$

prop 32 Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_p)$ base de E et $(f_1, \dots f_q) = \mathcal{B}'$ base de F et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$. Alors $rg(A) = rg(f)$

rq 33 En particulier, 2 matrices représentant la même application linéaire dans 2 bases différentes ont même rang.

th 34 (théorème du rang)

Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\dim(E) = rg(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$

appli 35 Si $\dim(E) = \dim(F)$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors f est bijective $\Leftrightarrow$ f est surjective $\Leftrightarrow$ f est injective.

appli 36 Polynômes interpolateurs de Lagrange :

Pour tout $(a_0, \dots a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que les a_i sont deux à deux distincts, pour tout $(b_0, \dots b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\exists !\, P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $P(a_i) = b_i$

2) Matrices équivalentes et rang

rappel 37 Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ sont équivalentes (noté $A \sim B$) si A et B sont matrices de la même application linéaire ssi s'il existe $P \in GL_m(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ^{-1}$

prop 38 Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $rg(A) \geq 1$ alors

$$A \sim J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

csqc 39 $A \sim B \Leftrightarrow rg(A) = rg(B)$ DEV2

appli 40 Il y a $\min(m,n)+1$ classe d'équivalences pour la relation $\sim$

appli 40 Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![0, \min(m,n)]\!]$

Notons $A_r = \{ M \in M_{m,n}(\mathbb{F}_q) \mid rg(M) = r \}$

Alors $|A_r| = \prod_{i=0}^{r-1} \dfrac{(q^m - q^i)(q^n - q^i)}{(q^r - q^i)}$ DEV2