219. EXTREMUMS : EXISTENCE, CARACTÉRISATION, RECHERCHE. EXEMPLES ET APPLICATIONS

I/ Définitions et cadre de travail

<u>Cadre</u>. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n muni de la norme euclidienne $\|\ \|$. Soit $U \subset E$ non vide.

[R] p370 <u>def 1.1</u> Soit $a \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f admet :

- un minimum global en a si $\forall x \in U,\ f(x) \geq f(a)$
- un minimum local en a si il existe un voisinage V de a dans E tel que $\forall x \in V \cap U,\ f(x) \geq f(a)$
- un minimum strict global (resp local) si l'inégalité du 1er point (resp. 2ème) est stricte pour $x \neq a$.

<u>rq 1.2</u>. La notion de maximum se définit en inversant le sens des inégalités
- Un extremum est un maximum ou un minimum

<u>ex 1.3</u> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x)$ admet un minimum global non strict (qui est aussi un minimum local strict) en $-\frac{\pi}{2}$

II/ Compacité et existence d'extremums.

[T] p44 <u>th 2.1</u> Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et que U est un compact de E alors f est bornée sur U et atteint ses bornes

<u>ex 2.2</u> Soit $N : (\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ une norme. N est continue sur le compact $S_\infty(0,1)$: elle y est donc bornée et elle y atteint son minimum

<u>app 2.3</u> Équivalence des normes en dimension finie

[T] p46 <u>def 2.4</u> $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive si :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in U, \left(\|x\| \geq B \text{ ou } d(x, U^c) \leq \alpha\right) \Longrightarrow f(x) \geq A$$

<u>rq 2.5</u> Si $U = E$, f est coercive sur U ssi $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$

<u>th 2.6</u> Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et coercive. Alors f est minorée et atteint sa borne inférieure. [T] p46

<u>ex 2.7</u> $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ est continue et coercive. Elle atteint son minimum en $(0,0)$

<u>app 2.8</u> Théorème de d'Alembert : tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant admet une racine complexe. [T] p48

III/ Extremums et calcul différentiel

Dans cette partie, on suppose que U est <u>ouvert</u>

1) Ordre 1

<u>def 3.1</u> Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$ tel que $Df(a)$ existe. On dit que a est un point critique de f si $Df(a) = 0$

<u>th 3.2</u> Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$. Si a est un extremum local et si $Df(a)$ existe alors a est un point critique de f [R] p371

<u>ct-ex 3.3</u> Cette condition est nécessaire pour avoir un extremum mais pas suffisante : $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^3$ vérifie $Df(0) = 0$ mais n'a pas d'extremum en 0 [OA] p17

<u>app 3.4</u> Théorème de Rolle : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$ $(a<b)$. Alors $\exists c \in]a,b[,\ f'(c) = 0$ [G] p71

<u>app 3.5</u> Théorème des accroissements finis : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(a<b)$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors $\exists c \in]a,b[,\ f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ [G] p72

2) Ordre 2.

<u>th 3.6</u> Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$. Si a admet un minimum local en a et si $D^2 f(a)$ existe alors $Df(a) = 0$ et $D^2 f(a)$ est une forme quadratique positive. [R] p371

[OA] p18 ex 3.7 • $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2+y^4$ admet un minimum en $(0,0)$ et on a bien $Df(0,0) = 0$ et $D^2f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est bien positive

[OA] p18 ct-ex 3.8 La condition 3.6 est nécessaire à l'existence d'un extremum mais pas suffisante : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 - y^3$ admet $(0,0)$ comme point critique ; $D^2f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est positive mais $(0,0)$ n'est pas un minimum local de f.

[R] p371 Th 3.9 Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. Si $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)$ est définie positive alors f admet un minimum local strict en a.

[R] p373 ex 3.10 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$ admet un point critique en $(0,\sqrt{2})$ et $D^2f(0,\sqrt{2})$ est définie positive donc $(0,\sqrt{2})$ est un minimum local strict de f

ct-ex 3.11 La condition 3.9 est suffisante à l'existence d'un extremum mais pas nécessaire : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2+y^4$ admet un minimum local strict en $(0,0)$ mais $D^2f(0,0)$ n'est pas définie, comme vu en 3.7.

[G] p317 prop 3.12 Cas de la dimension 2. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ où $U \subset \mathbb{R}^2$ de classe C^2 sur U et $a \in U$ tel que $Df(a) = 0$.

- Si $\det(D^2f(a)) > 0$, a est un extremum local de f
- Si $\det(D^2f(a)) < 0$, f n'a pas d'extremum en a
- Si $\det(D^2f(a)) = 0$, on ne peut rien dire sur a a priori

[G] p318 app 3.13 Principe du maximum harmonique

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathring{B}(0,1)$. Alors $\forall x \in B(0,1)$,

$$\min_{\|y\|=1} f(y) \leq f(x) \leq \max_{\|y\|=1} f(y)$$

3) Problèmes sous contraintes

Th 3.14 Théorème des extrema liés [R] p373 et [G] p317

Soit $f, g_1, \dots g_p : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $\Gamma = \{x \in U, \forall 1 \leq i \leq p, g_i(x) = 0\}$

Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$ et si les $Dg_i(a)$ sont linéairement indépendantes alors $\exists \lambda_1, \dots \lambda_p \in \mathbb{R}$, nommés multiplicateurs de Lagrange, tels que $Df(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(a)$

rq 3.15 Interprétation géométrique : $\nabla f(a)$ est orthogonal au plan tangent à Γ en a. [OA] p21

app 3.16 Inégalité arithmético-géométrique : [G] p319

$$\forall (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^+, \left(\prod_{i=1}^{m} x_i\right)^{1/m} \leq \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)$$

app 3.17 Diagonalisation des endomorphismes symétriques : [OA] p21

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique.

Alors il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u

IV / Extremums et convexité

1) Fonctions convexes

On suppose ici que U est convexe et non vide

def 4.1 Soit $f : U \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe si [OA] p27

$\forall x,y \in U, \forall t \in [0,1], \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$

Si de plus l'inégalité est stricte pour $x \neq y$ et $t \in]0,1[$, on dit que f est strictement convexe.

Th 4.2 Si U est ouvert en plus d'être convexe et $f : U \to \mathbb{R}$ est convexe on a : [T] p259

- si $a \in U$ est un maximum global alors f est constante
- si $a \in U$ est un minimum local de f alors ce minimum est global

[T] p259 **th 4.3** Si $f : U \to \mathbb{R}$ est convexe et différentiable sur l'ouvert convexe U alors f admet un extremum local en a si et seulement si $Df(a) = 0$

ex 4.4 $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{cases}$ est convexe et minorée mais comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $Df(x) \neq 0$, f n'admet pas de minimum (ni local, ni global) sur $\mathbb{R}$

th 4.5 Si $f : U \to \mathbb{R}$ est strictement convexe et admet un minimum alors il est unique

[X-ENS] p229 **app 4.6** Ellipsoïde de John-Loewner DEV1

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in \mathring{K}$. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 et de volume minimal contenant K

2) Projection sur un convexe fermé

th 4.7 Soit C un convexe fermé non vide de E et $x \in E$

Alors $\exists !\, P_C(x) \in C$ tel que $\|x - P_C(x)\| = d(x, C)$

et ce point est caractérisé par $\begin{cases} P_C(x) \in C \\ \forall y \in C, \langle x - P_C(x), y - P_C(x) \rangle \leq 0 \end{cases}$

[R] p384 **app 4.8** Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $\forall i \in [1, m]$, (x_i, y_i) un point de $\mathbb{R}^2$

On suppose que les x_i ne sont pas tous égaux. Alors $\exists !\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tq la somme $\sum_{i=1}^{m} (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$ est minimale.

V Algorithmes de recherche et d'approximation

5.1 Descente de gradient à pas optimal. [HU] p53

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax | x \rangle + \langle b | x \rangle + c$

où $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon \geq 0$

L'algorithme

tant que $\nabla f(x_k) > \varepsilon$

$$x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_k) \quad \text{où } t_k = \underset{t \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} f(x_k - t \nabla f(x_k))$$

permet de construire la suite x_k qui tend vers $\bar{x} = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} f(x)$ et telle que $\|x_k - \bar{x}\| \leq C \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_n + \lambda_1} \right)^k$

où $C \in \mathbb{R}$ et $\lambda_n = \min Sp(A)$
$\lambda_1 = \max Sp(A)$

5.2 Méthode de Newton DEV2 [R] p152

Soit $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ sur $[c, d]$.

La suite $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}$ converge vers a l'unique zéro de f sur $[c, d]$ si x_0 assez proche de a. De plus $|x_{n+1} - a| \leq C |x_n - a|^2$.

Si $f'' > 0$ alors $x_0 \in [a, d]$ suffit.

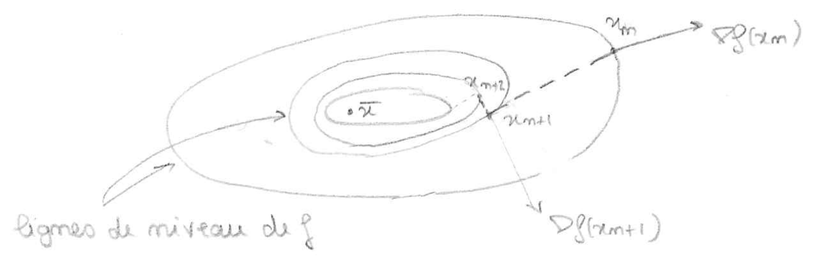
Corollaire 5.3: Si $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ est de classe C^3 et strictement convexe, on peut approcher son minimum par la méthode de Newton appliquée à f'.

ANNEXE A

Méthode de descente dans le cas général :

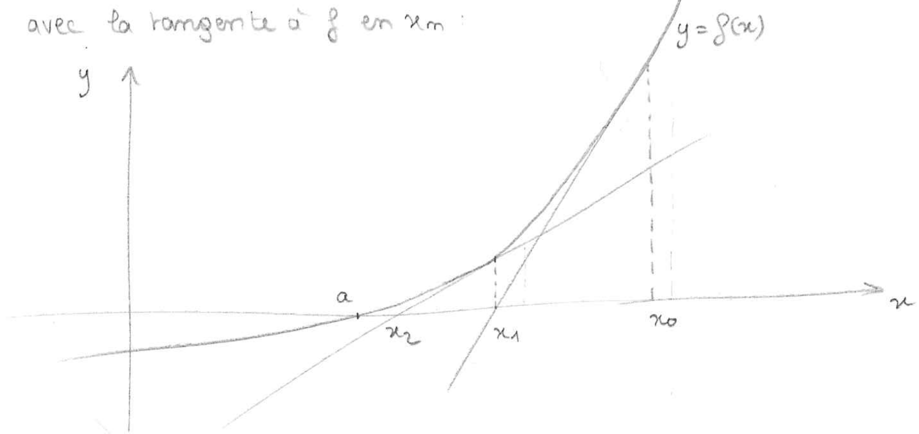
$$x_{n+1} = x_n + \underbrace{t_n}_{\text{pas}} \underbrace{d_n}_{\text{direction de descente}}$$

Dans le cas d'une descente de gradient à pas optimal, $d_n = \nabla f(x_n)$ et le pas est optimal au sens où à chaque étape on minimise f sur la droite $x_n + \mathrm{Vect}\,(\nabla f(x_n))$:



ANNEXE B

Méthode de Newton : x_{n+1} est l'intersection de (Ox) avec la tangente à f en x_n :



Références

[R] = Rouvière, PGCD

[G] = Gourdon analyse

[OA] = Objectif agrégation

[X-ENS] = Oraux X-ENS algèbre 3

[HU] = Hiriart-Urruty, Optimisation et analyse convexe