

La fonction d'Ackermann n'est pas récursive primitive

def on def la fonction d'Ackermann a par

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a(0, x) = 2^x \\ a(y, 0) = 1 \\ a(y+1, x+1) = a(y, a(y+1, x)) \end{cases}$$

[Cours de logique mathématique 2 p 18]

pour la démo faire que [

Th : a n'est pas récursive primitive + notation : $\forall m, k, a_m : x \mapsto a(m, x)$
et $a_m^k =$ composé k^e de a_m

Étape 1 On commence par étudier les fonctions $(a_m)_{m \geq 0}$ tq

$$\forall m \geq 0, a_m : x \mapsto a(m, x)$$

$$\text{En particulier, } a_0 : x \mapsto 2^x \text{ et } \forall m \geq 1, a_m : \begin{cases} 0 \mapsto 1 \\ x+1 \mapsto a(m, x+1) = a(m-1, a(m, x)) \\ \quad = a_{m-1}(a_m(x)) \end{cases}$$

On sq les a_m sont récursives primitives

prop des a_m

- (1) $\forall m, x \in \mathbb{N}, a_m(x) > x$
- (2) $\forall m \in \mathbb{N}, a_m$ croît strictement
- (3) $\forall m, x \in \mathbb{N}, a_{m+1}(x) \geq a_m(x)$

démo (1) / rec sur $m \in \mathbb{N}$, montrons $H_m : " \forall x \in \mathbb{N}, a_m(x) > x "$

On a bien H_0 car $\forall x \in \mathbb{N}, a_0(x) = 2^x > x$

Soit m tq H_m . Montrons / rec sur x $\tilde{H}_x : " a_{m+1}(x) > x "$

$$a_{m+1}(0) = 1 > 0 \text{ donc } \tilde{H}_0$$

$$\text{Soit } x \text{ tq } \tilde{H}_x. \quad a_{m+1}(x+1) \stackrel{\text{def}}{=} a_m(a_{m+1}(x)) > a_{m+1}(x) \text{ par } H_m$$

$$\geq \underbrace{a_{m+1}(x) + 1}_{> x \text{ par } \tilde{H}_x} \text{ dans } \mathbb{N}$$

$$> x+1$$

D'où $\tilde{H}_{x+1}$ puis H_{m+1} ce qui conclut

(2) $a_0: x \mapsto 2^x$ croît strictement

et $\forall m \geq 1, \forall x \in \mathbb{N}, a_m(x+1) \stackrel{\text{def}}{=} a_{m-1}(a_m(x)) \xrightarrow{\text{pu (1) appliqué à } a_{m-1}} a_m(x)$

donc a_m est aussi strictement croissante

(3) Soit $m \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons /rec sur $x \in \mathbb{N}$, $H_x: "a_{m+1}(x) \geq a_m(x)"$

$$a_{m+1}(0) = 1 = a_m(0) \text{ donc } H_0$$

Soit x tq H_x . Par (1) et le fait qu'on travaille dans $\mathbb{N}$,

$$a_{m+1}(x) \geq x+1. \quad \text{Par croissance de } a_m \text{ (2),}$$

$$a_m(a_{m+1}(x)) \geq a_m(x+1)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} a_{m+1}(x+1)$$

D'où H_{x+1} et la conclusion.

Etape 2

def On note désormais pour tout $k \in \mathbb{N}$ a_m^k la composée k^e de a_m

$$\text{Req: } \forall m \in \mathbb{N}, a_m^0 = \text{idemité}$$

prop des a_m^k

dire que ces prop

(4) Les fonctions a_m^k sont strictement croissantes $\forall m, k \in \mathbb{N}$

se montrent /rec

$$(5) \forall m, k, x \in \mathbb{N}, a_m^{k+1}(x) > a_m^k(x)$$

sur k avec initialiser $=$

$$(6) \forall m, k, x \in \mathbb{N}, a_m^k(x) \geq x$$

étude de a_m + souligner

$$(7) \forall m, k, x \in \mathbb{N}, a_{m+1}(x+k) \geq a_m^k(x)$$

que ces prop sont des prop

$$(8) \forall m \leq n \in \mathbb{N}, \forall x, k \in \mathbb{N}, a_m^k(x) \leq a_n^k(x)$$

de croissance soit sur

l'indice, soit exponent, soit argument x

démos (4) Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrons /rec sur k . $H_k: "a_m^k \text{ est strictement croissante}"$

Vrai pour $k=0$ car l'idemité croît strictement

$$\text{Soit } k \text{ tq } H_k. \text{ Alors } \forall x \in \mathbb{N}, a_m^k(x+1) > a_m^k(x)$$

$$\text{Comme } a_m \text{ croît strictement par (2), on a } \forall x \in \mathbb{N}, a_m^{k+1}(x+1) > a_m^{k+1}(x)$$

(5) Soit $m, x \in \mathbb{N}$. /rec sur $k \in \mathbb{N}$ montrons $H_k: "a_m^{k+1}(x) > a_m^k(x)"$ car H_{k+1}

$$a_m^1(x) > x = a_m^0(x) \text{ donc } H_0$$

$\hookrightarrow$ par (1)

$$\text{Soit } k \text{ tq } H_k. \text{ On a donc } a_m^{k+1}(x) > a_m^k(x)$$

$$\text{Par stricte croissance de } a_m \text{ (2) on a donc } a_m^{k+2}(x) > a_m^{k+1}(x) \text{ donc } H_{k+1}$$

(6) Soit $m, x \in \mathbb{N}$. Montrons /rec sur $k \in \mathbb{N}$ $H_k: "a_m^k(x) \geq x"$

$$a_m^0(x) = x \geq x \text{ donc } H_0$$

Soit k tq H_k . On a donc $a_m^k(x) \geq x$. Toujours par croissance de a_m (2)

$$a_m^{k+1}(x) \geq a_m^k(x) \geq x \quad \hookrightarrow \text{par (1)} \quad \text{D'où } H_{k+1}$$

(7) Soit $m, x \in \mathbb{N}$. Montrons /rec sur $k \in \mathbb{N}$ $H_k: "a_m^k(x) \leq a_{m+1}(x+k)"$

$$a_{m+1}(x) \geq x = a_m^0(x) \text{ donc } H_0$$

Soit k tq H_k . On a donc $a_m^k(x) \leq a_{m+1}(x+k)$. Par croissance de a_m (2),

$$a_m^{k+1}(x) \leq a_m(a_{m+1}(x+k)) \stackrel{\text{def}}{=} a_{m+1}(x+k+1) \text{ donc } H_{k+1}$$

(8) Il suffit de mg $\forall m, x, k \in \mathbb{N}, a_m^k(x) \leq a_{m+1}^k(x)$

Soit $m, x \in \mathbb{N}$ et montrons le résultat /rec sur $k \in \mathbb{N}$

$$a_m^0(x) = x \leq x = a_{m+1}^0(x) \text{ donc } H_0$$

Soit k tq H_k . On a $a_m^k(x) \leq a_{m+1}^k(x)$. Par $\nearrow$ de a_m (2)

$$a_m^{k+1}(x) \leq a_m(a_{m+1}^k(x)) \leq a_{m+1}(a_{m+1}^k(x)) = a_{m+1}^{k+1}(x) \text{ d'où } H_{k+1}$$

Étape 3

def Soit $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \nearrow$ et $g: \mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}$. On dit que f domine g si

expliquer $\bar{x}$
et $\|x\|_2$

$\forall$ tout uple $(x_1, \dots, x_p)$ ou $\bar{x} \in \mathbb{N}^p$, $f(x_1, \dots, x_p) \leq f(\max_{i=1}^p x_i)$

↳ noter ppri et expliquer

$\forall m \geq 0$ on note $C_m = \{g \mid \exists p \in \mathbb{N}, g: \mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N} \text{ et } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tq } g \text{ est dominée par } a_m^k\}$

$$\text{on note } C = \bigcup_{m \geq 0} C_m$$

Lemme

prop C contient toutes les fonctions primitives récurives

(toutes les $\leq$ sont vrais
ou $\bar{x} \in \mathbb{N}^p$ et $\|x\|_2$
uple)

• C contient les fonctions de base car

$$\forall x \in \mathbb{N}, 0(x) = 0 \leq x = a_0^0(x) \text{ donc } 0 \in C_0$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \leq p, \forall (x_1, \dots, x_p), \pi_k^p(x_1, \dots, x_p) = x_k \leq \max_{i=1}^p x_i = a_0^0(\max_{i=1}^p x_i) \text{ de } \pi_k^p \in C_0$$

$$\forall x \in \mathbb{N}, S(x) = x+1 \leq a_0^0(x) \text{ donc } S \in C_0 \text{ aussi}$$

• La prop (8) assure que si $m \leq n$ alors $C_m \subset C_n$. En particulier, si f et $g \in C_k \times C_{k'}$

on peut toujours considérer que f et $g \in C_{\max(k, k')}$

• Montrons que C est stable par composition. Vu le 2^e pt, il suffit de mg

$\forall m \geq 0, C_m$ est stable par composition.

Soit $f_1, \dots, f_m: \mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}$ et $g: \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N} \in C_m$ → ça simplifie

Alors $\exists k_1, \dots, k_m, k$ tq $\forall i, f_i(x_1, \dots, x_p) \leq a_m^{k_i}(\max_{i=1}^p x_i)$ et $g(x_1, \dots, x_m) \leq a_m^k(\max_{i=1}^m x_i)$ par (5)

Notons $R = \max_{i=1}^m k_i$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } g(f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_m(x_1, \dots, x_p)) &\leq a_m^k(\max_{i=1}^m f_i(x_1, \dots, x_p)) \\ &\leq a_m^k(a_m^R(\max_{i=1}^p x_i)) = a_m^{k+R}(\max_{i=1}^p x_i) \end{aligned}$$

$$\text{ou } \forall i, f_i(x_1, \dots, x_p) \leq a_m^{k_i}(\max_{i=1}^p x_i) \leq a_m^R(\max_{i=1}^p x_i) \text{ par (5)}$$

• Montrons que C est stable par schéma de récursion. Pour cela il suffit de mg si

$g: \mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}$ et $h: \mathbb{N}^{p+2} \rightarrow \mathbb{N} \in C_m$ alors $R(g, h) = f \in C_{m+1}$

/hp $\exists k_1, k_2$ tq $g(x_1, \dots, x_p) \leq a_m^{k_1}(\max_{i=1}^p x_i)$ et $h(x_1, \dots, x_p, y, z) \leq a_m^{k_2}(\max_{i=1}^p x_i, y, z)$

De plus soit def par

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_p, 0) = g(x_1, \dots, x_p) \\ f(x_1, \dots, x_p, y) = h(x_1, \dots, x_p, y, f(x_1, \dots, x_p, y)) \end{cases}$$

Montrons /rc au y $\in \mathbb{N}$ H_y: " $f(x_1, \dots, x_p, y) \leq a_m^{k_1+k_2 y}(\max_{i=1}^p x_i, y)$ "

H₀ est clair. Soit y tq H_y. Alors $f(x_1, \dots, x_p, y+1) = h(x_1, \dots, x_p, y, f(x_1, \dots, x_p, y))$

$$\begin{aligned} \text{/H}_y &\leq a_m^{k_1+k_2 y}(\max_{i=1}^p x_i, y) \\ &\leq a_m^{k_2}(\max_{i=1}^p x_i, y, a_m^{k_1+k_2 y}(\max_{i=1}^p x_i, y)) \\ &\leq a_m^{k_1+k_2(y+1)}(\max_{i=1}^p x_i, y) \text{ par (6)} \end{aligned}$$

Donc par (7), $f(x_1, \dots, x_p, y) \leq a_{m+1}(\max_{i=1}^p x_i + k_1 + k_2 y) \in C_{m+1}$ donc f aussi $\in C_{m+1}$ car $\max_{i=1}^p x_i \leq 2^{\max_{i=1}^p x_i}$

Étape 4 Conclusion:

on exhibe 1 fonction construite avec qui croît + vite que toute fct. réc. prim (ou sens où elle est pas dominée par a_m^k alors elle croît plus vite)

Supposons par l'absurde que a est primitive récursive. Alors $f: x \mapsto a(x, 2x)$ aussi l'est

par composition. Donc $f \in C$ cad $\exists m, k \in \mathbb{N}$ tq $\forall x$ seul 1 mb $< \infty$,

$$a(x, 2x) \leq a_m^k(x) \leq a_{m+1}(x+k) \text{ par (7)}$$

Or, dès que $x \geq k+1$, on a $a_{m+1}(x+k) < a_{m+1}(2x)$ (strictement de a_{m+1})

et $x \geq m+1$

$$\leq a_x(2x) \text{ par (8)}$$

$$= a(x, 2x)$$

Donc $\forall x \geq \max(k, m)+1, a(x, 2x) < a(x, 2x) \Rightarrow \text{X}$