Th Burnside [oraux X-ENS alg 2 p 185]

- Th Soit G 1 ssgp de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant $<\infty$ (pour $\times$) (cad $\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall A \in G, A^N = I_n$)

Alors G est $<\infty$

- Lemme $A \in M_n(\mathbb{C})$. A est nilp $\Leftrightarrow \forall k \geq 1, tr(A^k) = 0$

démo $\Leftarrow$ clair en trigonalisant A

$\Rightarrow$ /abs A pas nilp Alors $\exists \lambda$ vp de $A \neq 0$

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les vps $\neq$ et $\neq 0$ de A de mult $m_1, \dots, m_r$ $\neq 0$ $(r \geq 1)$

On trigonalise A (car ds $M_n(\mathbb{C})$ tout le monde est trigonalisable)

et /Hp, $\forall k \geq 1$ $m_1 \lambda_1^k + \dots + m_r \lambda_r^k = 0$

Dc ${}^t(m_1, \dots, m_r)$ est solut° de $\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_r \\ \vdots & & \\ \lambda_1^r & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix}}_{= A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = 0$

donc est nul car

A est de det $\neq 0$ car Vandermonde avec les λ_i deux à deux $\neq$

$\Rightarrow$ X.

démo Soit N l'exposant $<\infty$ de G et $(M_1, \dots, M_m)$ 1 base de $Vect(G)$

constituée d'élément de G (qui $\exists$ car $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ de dim $<\infty$)

Soit $f : \begin{cases} G \longrightarrow \mathbb{C}^m \\ A \longmapsto (tr(AM_1), \dots tr(AM_m)) \end{cases}$

$\rightarrow$ f est injective car si A, B st tq $f(A) = f(B)$

alors $\forall i$, $tr(AM_i) = tr(BM_i)$ puis par linéarité,

$\forall M \in G$, $tr(AM) = tr(BM)$ (car $(M_i)_i$ = base $Vect(G)$)

Or $D = AB^{-1} \in G$ donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $tr(D^{k+1}) = tr(A\underbrace{B^{-1}D^k}_{\in G}) = tr(BB^{-1}D^k) = tr$

donc / rec, $\forall k \in \mathbb{N}$, $tr(D^k) = tr(I_n) = n$.

Comme D et I_n commutent, / Newton, $\forall k \geq 1$

$$Tr((D - I_n)^k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \, tr(D^{k-j})$$
$$= n \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \right) = n(1-1)^k = 0$$

Par le lemme, $D - I_n$ est donc nilpotente

De plus, $\forall M \in G, P = X^N - 1$ est 1 pol annulateur de M

Comme P est SARS, toutes les matrices de G sont diagonalisables

ds $\mathbb{C}$

en particulier D.

Donc $D - I_n$ est diag et nilp $\Rightarrow D - I_n = 0 \Rightarrow A = B$

$\rightarrow$ l'image de f est $< \infty$

$Im(f) \subset T^n$ où $T = \{ tr(A) \mid A \in G \}$

Or les élé de G sont tous diag et leurs vps sont des racines N^e de 1

Dc $|X| \leq \#$ sommes qu'on peut faire avec les N racines N^e de 1 avec n termes

$\leq N^n$.

$\rightarrow$ ccl : $|G| \overset{\text{par inj}}{\leq} |Im(f)| \leq (N^n)^m \leq N^{n^3}$ car $m \leq n^2 = \dim GL_n$

$< \infty$