K de $\int$ de Gauss [Gourdon analyse p 163] + [Gourdon analyse p 335]

(Th) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

1ère démo On note $h : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) \longmapsto \dfrac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} \end{cases}$

et $g : \begin{array}{c}\mathbb{R}^+ \\ \Psi \\ x\end{array} \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\,dt$

On a $\begin{cases} \forall x \geqslant 0,\ t \mapsto h(x,t) \text{ est } \int \text{ sur } [0,1] \text{ (car continue sur } [0,1]) \\ \forall t \in [0,1],\ x \mapsto h(x,t) \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \text{ (et m̂ } C^\infty) \\ \forall x \geqslant 0,\ t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2x\,e^{-(t^2+1)x^2} \text{ donc } \forall K>0, \forall x \in [0,K], \forall t \in [0,1], \end{cases}$

$\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq 2K$ qui est $\int_0^1$ indép de x.

Donc g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g'(x) = \int_0^1 -2x\,e^{-(t^2+1)x^2}\,dt = -2x\,e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}\,dt \quad u = tx$$

$$= -2\,e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du$$

$$= -2 f(x) f'(x) \quad \text{avec } f : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \int_0^x e^{-u^2}\,du$$

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle g(x) - g(0) = \int_0^x g'(t)\,dt = -2\int_0^x f(t)f'(t)\,dt$

$$= -\left(f(x)^2 - f(0)^2\right)$$

Or, $f(0) = 0$ et $\displaystyle g(0) = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = \dfrac{\pi}{4} - f(x)^2$ $(*)$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $\displaystyle 0 \leq g(x) = e^{-x^2}\int_0^1 \frac{e^{-t^2x^2}}{t^2+1}\,dt \leq e^{-x^2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi e^{-x^2}}{4} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

On en déduit que $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par encadrements puis que $x \to +\infty$ ds $(*)$

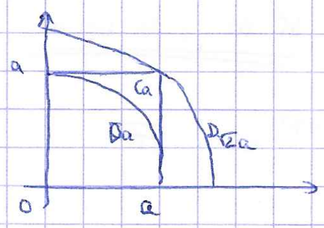
donne $f(x)^2 \xrightarrow[+\infty]{} \dfrac{\pi}{4}$. Comme $f \geqslant 0$ on a donc $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{+\infty} f = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ puis que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$

par parité

2ème démo (que du K d'$\int$...)

Soit $a>0$. On note $D_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq a^2\}$



$$C_a = [-a,a]^2$$

$$I_a = \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$\text{et } J_a = \iint_{C_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

On a, par passage en coordonnées polaires + Fubini (fct° ≥ 0)

$$I_a = \iint_{[0,a]\times[0,2\pi]} e^{-r^2}\, r\,dr\,d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^a re^{-r^2}\,dr\right) = 2\pi\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^a$$

$$= \pi\left(-e^{-a^2}+1\right)$$

D'autre part, par Fubini (fct° ≥ 0)

$$J_a = \left(\int_{-a}^a e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-a}^a e^{-y^2}\,dy\right) = \left(\int_{-a}^a e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

Enfin, $D_a \subset C_a \subset D_{\sqrt{2}a}$ et la fonction $(x,y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$ est positive donc

$$\forall a>0, \quad I_a \leq J_a \leq J_{\sqrt{2}a}$$

$$\text{càd} \quad \pi\left(1-e^{-a^2}\right) \leq \left(\int_{-a}^a e^{-x^2}\,dx\right)^2 \leq \pi\left(1-e^{-2a^2}\right)$$

En faisant $a \longrightarrow +\infty$, on obtient bien $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$