Groupe circulaire [Audin = Géométrie p 204]

(Th) Le groupe circulaire $G = \langle z \mapsto \bar{z}, \text{homographies} \rangle$ est l'ensemble des bij de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ qui préserve $\mathcal{C} = \{$droites et cercles de $\mathbb{C}\}$ = {droites de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$}

(où cercle = droite passant par ∞)

démo ($\Rightarrow$) $z \mapsto \bar{z}$ préserve $\mathcal{C}$ et / prop du plan les homographies aussi

Comme les générateurs de G préservent $\mathcal{C}$, les éléments de G aussi.

($\Leftarrow$) Soit φ bij de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ qui préserve $\mathcal{C}$. Montrons que $\varphi \in G$.

- Montrons que φ préserve les divisions harmoniques càd

$(*)$ $\forall\, a, b, c, d \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, $[a; b; c; d] = -1 \Rightarrow [\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c), \varphi(d)] = -1$

Pour ce faire on montre le lemme suivant : Soit $[a, b, c, d] = -1$

φ préserve $[a, b, c, d] \Leftrightarrow h_1 \circ \varphi \circ h_2 = \tilde{\varphi}$ préserve la division harmonique $[0, 1, \frac{1}{2}, \infty]$

où h_2 = l'! homographie tq $h_2(0) = a$, $h_2(1) = b$, $h_2(\frac{1}{2}) = c$ et h_1 est une homog tq $h_1(\varphi(d)) = \infty$. De plus $\tilde{\varphi}(\infty) = \infty$

démo lemme On remarque d'abord que nécessairement $h_2(\infty) = d$

(/ex car $[0, 1, \frac{1}{2}, \infty] = -1$ est conservé par h_2 donc $[a, b, c, h(\infty)] = -1$

$= [a, b, c, d]$ donc $h(\infty) = d$)

De plus, on a effectivement $\tilde{\varphi}(\infty) = h_1 \circ \varphi(\underbrace{h_2(\infty)}_{= d}) = \infty$ par déf.

($\Rightarrow$) On sait que $[\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c), \varphi(d)] = -1$

càd / déf h_2 $[\varphi \circ h_2(0), \varphi \circ h_2(1), \varphi \circ h_2(\frac{1}{2}), \varphi \circ h_2(\infty)] = -1$

Comme h_1 = homog, elle préserve ce birapport donc $[\tilde{\varphi}(0), \tilde{\varphi}(1), \tilde{\varphi}(\frac{1}{2}), \tilde{\varphi}(\infty)] = -1$ OK

($\Leftarrow$) On a $-1 = [\tilde{\varphi}(0), \tilde{\varphi}(1), \tilde{\varphi}(\frac{1}{2}), \tilde{\varphi}(\infty)] = [h_1(\varphi(a)), h_1(\varphi(b)), h_1(\varphi(c)), h_1(\varphi(d))]$

$= [\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c), \varphi(d)]$ car h_1 conserve les birapports

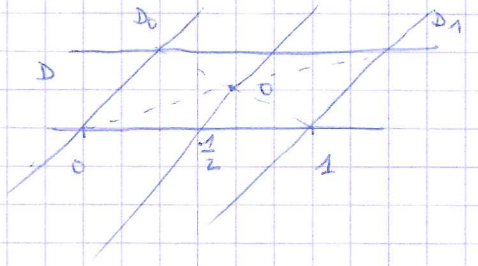
On en déduit que pour montrer $(*)$ il suffit de mq $\forall \tilde{\varphi}$ bij de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ qui préserve $\mathcal{C}$ et tq $\tilde{\varphi}(\infty) = \infty$

alors $\tilde{\varphi}$ préserve la division harmonique $[0, 1, \frac{1}{2}, \infty]$. C'est le cas car $\varphi(\infty) = \infty \Rightarrow$

/ φ(cercle) = cercle) et φ(droite) = droite. On en déduit de plus que φ préserve le parallélisme et l'intersection de droites (injectivité)

Or, on peut construire $\frac{1}{2}$ = milieu de 0 et 1 comme pt d'$\cap$ de droites construites

à partir de 0 et 1 :



1) Tracer D_0 passant par 0 et $D_1 \parallel D_0$ passant par 1

2) Tracer $D \parallel$ à $(0,1)$

3) Tracer diag parallélogramme puis $D' \parallel D_0$ passant par O $\to$ $D' \cap (0,1) = \frac{1}{2}$

Cette figure (position relative des pts) est préservée par $\tilde{\varphi}$ donc $\tilde{\varphi}(\frac{1}{2}) =$ milieu de $[\tilde{\varphi}(0), \tilde{\varphi}(1)]$ donc /prop

$$[\tilde{\varphi}(0), \tilde{\varphi}(1), \tilde{\varphi}(\tfrac{1}{2}), \underbrace{\tilde{\varphi}(\infty)}_{=\infty}] = -1 \text{ et OK}$$

(→ Rempl par ? ∈ si mon ? ?)

- Quitte à composer φ par 1 homographie, sps $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(\infty) = \infty$

  Montrons que $\varphi_{|\mathbb{C}}$ est un automorphisme de corps qui fixe $\mathbb{R}$. $(\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = x)$

  Cela assurera que $\varphi : z \mapsto z$ ou $\varphi : z \mapsto \bar{z}$ donc conclura. (...)

On sait déjà que φ est bij et $\varphi(1) = 1$. Mq $\forall a, b \in \mathbb{C}$ $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

et $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ montrera que φ est un automorphisme de corps.

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. $\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) \overset{(1)}{=} \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}$ car φ préserve les divisions harmoniques donc les milieux

Donc $\varphi\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\varphi(a)+\varphi(0)}{2} = \frac{\varphi(a)}{2}$ donc $\varphi(a+b) = 2\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) \overset{(1)}{=} \varphi(a) + \varphi(b)$

De plus /expression du birapport (sauf pour 0 et 1 mais ... pour ... déjà acquis)

(*) $[a, -a, a^2, 1] = -1$

Comme φ préserve les divisions harmoniques,

$$-1 = \begin{cases} [\varphi(a), \varphi(-a), \varphi(a^2), \varphi(1)] = [\varphi(a), -\varphi(a), \varphi(a^2), 1] \text{ car } \varphi \text{ préserve } + \\ [\varphi(a), -\varphi(a), \varphi(a)^2, 1] \text{ en faisant } a \leftarrow \varphi(a) \text{ ds } (*) \end{cases}$$

Donc $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$ puis $\varphi(ab) = \varphi\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right) = \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \varphi\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ (respect de + et prop carrés)

$$= \left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)^2 - \left(\frac{\varphi(a)-\varphi(b)}{2}\right)^2 = \varphi(a)\varphi(b)$$

Il reste à mq $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x$ (ok pr ∞). On le fait pour $x \in \mathbb{N}$ en utilisant $\varphi(1) = 1$,

puis pour $x \in \mathbb{Z}$ puis pour $x \in \mathbb{Q}$ puis pour $x \in \mathbb{R}$ en l'encadrant par deux rationnels

et en mq φ est croissante $(x \geq y \Rightarrow x - y \geq 0 \Rightarrow \varphi(x-y) \geq 0$ car $x \geq 0 \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(\sqrt{x}^2) = \varphi(\sqrt{x})^2 \geq 0)$