

Autour du PVCE [Cormen p 1023-1026]

(Problème du voyageur de commerce euclidien)

↳ les chemins respectent l'IT

→ Écrire le PVCE puis E de 1 autre valeur

Th $\exists$ 1 2-approx polynomiale de PVCE car $\exists$ 1 algo polynomial Approx

tg $\forall$ graphe G instance de PVCE (muni de la fonction poids p) on a $p(\text{Approx}(G)) \leq 2 p(\text{PVCE}(G))$

démo : on considère l'algo suivant :

Approx(G) =

← ne pas l'écrire

choisir 1 sommet s de G
 $A = \text{Prim}(G, s)$ (* construit 1 arbre couvrant minimal en G enraciné en s)
 $L = \text{parcours_profondeur}$ de A
 renvoyer L

Cet algo prend en entrée 1 graphe complet non orienté et pondéré (à valeurs de $\mathbb{N}$)

et renvoie 1 liste de sommets (à laquelle on associe 1 cycle Hamiltonien)

- Cet algo est polynomial en $|G|$ car c'est le cas de Prim et de Parcours profond
- C'est 1 2-approx de PVCE

En effet, soit G 1 instance de PVCE (pondéré par p) . on note T^* 1 tournoi optimale dans G et on continue de noter A l'ACM donné par Approx

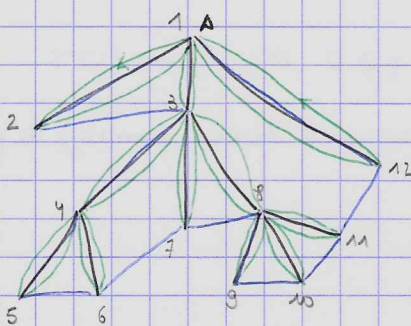
Si on enlève 1 arête v à T^* , on obtient 1 arbre couvrant pour G donc

$$p(A) \underset{\substack{\text{def ACM}}}{\leq} p(T^* \setminus \{v\}) \underset{\substack{\text{p est 1 fct } \geq 0}}{\leq} p(T^*) \quad (*)$$

D'autre part, notons T le chemin associé au parcours en profondeur de A

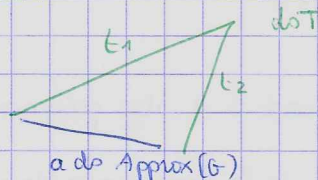
on a $p(T) = 2p(A)$ car on parcourt chaque arête de A 2x

donc /(*), $p(T) \leq 2p(T^*)$



$\text{---} = A$ $\text{---} = \text{parcours prof}$ $\text{---} = T$ $\text{---} = \text{Approx}(G)$

De plus $p(\text{Approx}(G)) \leq p(T)$ car les arêtes empruntées dans le cycle donné par $\text{approx}(G)$ sont soit des arêtes empruntées de T soit des raccourcis =
on est de la situation suivante :



$$\text{et /IT, } a \leq e_1 + e_2$$

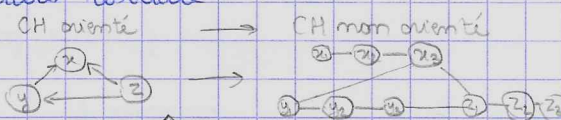
(rq : il peut y avoir + de deux arêtes : $e_1, \dots, e_k$)

En combinant toutes les inégalités, $p(\text{Approx}(G)) \leq 2p(T^*)$

Th Si $P \neq NP$, $\forall p \geq 1$, il n'y a pas d'algo d'approximation de PVC de rapport p et polynomial (rq $p=1 \rightarrow$ c'est normal car $PVC \in NP$)

$$p(Ap(G)) \leq p(PVC(G))$$

démo /abs un tel algo A_p existe. Montrons qu'on peut alors résoudre CYCLE-HAMILTONIEN en temps polynomial.



Soit $G=(S,A)$ instance de CYCLE-HAMILTONIEN (version non orienté, tout aussi NPc que orienté)

On modifie G en $G'=(S',A')$ tq $S'=S$ et G' est complet pondéré par $p: (u,v) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } (u,v) \in A \\ \lceil p|S| \rceil + 1 & \text{sinon} \end{cases}$ (entier)

Si G a 1 cycle hamiltonien, G' a 1 tournoi de poids $|S|$ sinon, toute tournée de G'

porte par 1 arête $\notin A$ donc est de poids $\geq (p|S|+1) + (|S|-1) = (p+1)|S| > p|S|$

Donc G a 1 cycle hamiltonien $\Rightarrow A_p(G')$ renvoie ce cycle

et sinon $A_p(G')$ renvoie 1 chemin de coût $> p|S|$

Donc G a 1 cycle hamiltonien $\Leftrightarrow p(A_p(G')) \leq p|S|$

On en déduit 1 algo polynomial pour CYCLE-HAMILTONIEN: transformer G et G' (pol),

appliquer A_p à G' (pol) puis calculer le poids de $A_p(G')$ et le comparer à $p|S|$.

Comme CYCLE-HAMILTONIEN est NP complet, cela conduit $P \neq NP$

us PVC entrée: graphe G complet non orienté pondéré par $p \geq 0$ et vérifiant l'IT

sortie: $\exists ?$ 1 cycle hamiltonien (1 et 1 seul passage à chaque sommet) de poids min?

CYCLE-HAMILTONIEN: entrée: graphe G (orienté) non pondéré

sortie: $\exists ?$ 1 cycle hamiltonien de G