Fiche TD 3

October 2, 2016

1 Approfondissement sur les fonctions génératrices.

Exercice 1 (CC Novembre 2015). Une variable aléatoire X discrète et entière (à valeur dans $\mathbb{N}$) admet pour fonction génératrice

$$G_X(s) = \frac{1}{t}(1+3s^3)^3, \quad s \in [-1,1].$$

1) Déterminez la valeur de la constante t.
2) X est elle intégrable? Si oui calculer son espérance.
3) X est elle de carré intégrable? Si oui calculer sa variance.
4) Déterminez la loi de X.

Une variable aléatoire Y discrète et entière admet pour fonction génératrice

$$G_Y(s) = k\ e^{1+s^2}, \quad s \in [-1,1].$$

1) Déterminez la valeur de la constante k.
2) X est elle intégrable? Si oui calculer son espérance.
3) X est elle de carré intégrable? Si oui calculer sa variance.
4) Déterminez la loi de X.

Exercice 2. Soient $X_1, X_2, \ldots$ une suite i.i.d. de variables aléatoires indépendantes de mme loi dites logarithmique, i.e.,

$$P(X=k) = \frac{(1-p)^k}{k\log(1/p)}, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

avec $p \in]0,1[$ fixé.
1) Montrer que X_1 est de carré intégrable puis calculer l'espérance et la variance de X.
2) calculer la fonction génératrice de X et retrouver les résultats de la question précédente.
3) On considère N une variable aléatoire indépendante des $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ qui suit une loi de poisson de paramètre $\mu > 0$ et $Y = \sum_{i=1}^N X_i$. Montrer que Y est de carré intégrable, puis calculer son espérance et sa variance.
4) Calculer la fonction génératrice de Y.

Exercice 3 (Marche aléatoire). On considère une suite i.i.d. $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires telles que

$$P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = -1) = p, \quad \text{avec} \;\; p \in]0,1[.$$

On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ pour $n \geq 1$ et $S_0 = 0$. Dès lors on appelle marche aléatoire la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(S_n = 0)$ donne la probabilité que la marche aléatoire retourne à l'origine après n pas. On note aussi T_0 l'instant de premier retour de la marche aléatoire en 0, i.e.,

$$P(T_0 = n) = P(S_i \neq 0, \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}, S_n = 0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Enfin on note, pour tout $s \in]-1,1[$,

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0)s^n \quad \text{et} \quad g(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T_0 = n)s^n.$$

On remarque que T_0 peut éventuellement prendre la valeur $+\infty$ et on adopte la notation $s^\infty = 0$ si $s \in]-1,1[$.

1) Prouver que pour tout $s \in]-1,1[$ on a $g(s) = E(s^{T_0})$.

2) Calculer $P(S_n = 0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que $\forall s \in]-1,1[$,

$$f(s) = \frac{1}{(1 - 4p(1-p)s^2)^{1/2}}.$$

(Indication: on rappelle le DSE suivant $(1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n$, $x \in]-1,1[$).

3) Prouver que $f(s) = 1 + f(s)g(s)$ pour tout $s \in]-1,1[$ et en déduire que

$$g(s) = 1 - (1 - 4p(1-p)s^2)^{1/2}.$$

4) En déduire que la probabilité de retour de la marche à l'origine est

$$P(T_0 < \infty) = g(1) = 1 - |2p - 1| = 2p \wedge (1-p).$$

5) Montrer que le retour de la particule en 0 est certain si et seulement si $p = 1/2$ et que dans ce cas $E(T_0) = \infty$.

6) On considère maintenant les temps de visite du point $r \in \mathbb{N}^*$. On définit T_r le temps de première visite en r tel que

$$P(T_r = n) = P(S_i \neq r, \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}, S_n = r), \quad n \in \mathbb{N},$$

et on note

$$g_r(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T_r = n)s^n, \quad s \in [-1,1].$$

Prouver que $F_r(s) = [F_1(s)]^r$ pour tout $s \in [-1,1]$ et que

$$F_1(s) = [1 - (1 - 4p(1-p)s^2)^{1/2}]/(2(1-p)s).$$

En déduire que la probabilité que la marche aléatoire visite $\mathbb{N}^*$ est $F_1(1) = (1-|2p-1|)/(2(1-p)) = 1 \wedge \frac{p}{1-p}$.

2 Variables aléatoires absolument continues.

Exercice 1. Etant donnés deux réels (a, b) on considère la fonction

$$F_{a,b}(x) = (a5^x)1_{]-\infty,0[}(x) + (b - \tfrac{1}{2}5^{-x})1_{[0,\infty[}(x).$$

1) Déterminer les couples (a, b) tels que $F_{a,b}$ soit une fonction de répartition. On notera X une variable aléatoire de fonction de répartition $F_{a,b}$.

2) Parmi les couples précédents, déterminer ceux pour lesquels la variables aléatoire X admet une densité. On donnera alors explicitement la valeur f_X de cette densité.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Montrer que $Y = \cos(X)$ est une variable aléatoire absolument continue et déterminer sa densité.

Exercice 3. Soit X un point tiré uniformément sur l'intervalle $[0, 2]$. Quelle est la probabilité que le triangle équilatéral de coté X ait une aire plus grande que 1.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et soit $Y = 4X(1 - X)$. Calculer la fonction de répartition de Y et en déduire que c'est une variable a densité. calculer cette densité. Calculer enfin si elle est bien définie la covariance de X et Y.