Fiche TD 4 (suite)

November 25, 2015

1 Variables aléatoires absolument continues, indépendance.

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur l'intervalle $[-1,1]$. Montrer que $Z = X + Y$ est absolument continue et que sa densité vaut

$$f_Z(z) = \frac{1}{4}(2 - |z|)1_{[-2,2]}(z).$$

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et suivant une loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Z = X - Y$.

1) Montrer que Z est une variable aléatoire absolument continue de densité

$$f_Z(z) = \frac{1}{2}e^{-|z|}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

2) Montrer que $|Z|$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 3. Soient (X,Y) un vecteur aléatoire absolument continu ayant pour densité

$$f_{X,Y}(x,y) = cye^{-xy}\, 1_{[0,\infty[}(x)\, 1_{[0,2]}(y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Déterminer la valeur de c pour laquelle $f_{X,Y}$ est bien une densité de probabilité.

2) Déterminer les densités marginales de X et Y et reconnaître la loi de Y. Les deux variables sont elles indépendantes?

3) Montrer que $V = \max(X,Y)$ est une variable aléatoire absolument continue et déterminer sa densité.

4) On pose $U = X + Y$, les variables U et V sont elles indépendantes?

Exercice 4. Soient X et Y indépendantes de lois $\gamma(a,1)$ et $\gamma(b,1)$. On pose $S = X + Y$, $R_1 = \frac{X}{X+Y}$ et $R_2 = X/Y$.

1) Montrer que S et R_2 sont indépendantes, que S suit une loi $\gamma(a+b,1)$ et que R_2 suit une loi $\beta_2(a,b)$ (béta de seconde espèce), i.e., admet pour densité

$$\frac{1}{B(a,b)}\,\frac{z^{a-1}}{(1+z)^{a+b}}\, 1_{]0,\infty[}(z).$$

2) En déduire que R_1 est indépendante de S et suit une loi $\beta(a,b)$ (béta de première espèce), de densité

$$\frac{1}{B(a,b)}\, z^{a-1}\ (1-z)^{a+b}\, 1_{]0,\infty[}(z).$$

3) En déduire que réciproquement, si S et R_1 sont deux variables indépendantes de loi respectives $\gamma(a+b,1)$ et $\beta(a,b)$, alors les variables aléatoires $X = R_1 S$ et $Y = (1-R_1)S$ sont indépendantes de lois $\gamma(a,1)$ et $\gamma(b,1)$.