Fiche TD 4

December 2, 2015

1 Variables aléatoires absolument continues (suite).

Exercice 1. Soit $c \in \mathbb{R}$, on considère la fonction

$$f_c(x) = -\log(x^c)\, 1_{]0,1[}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Pour quelle valeur de c, la fonction f_c est elle une densité de proba sur $\mathbb{R}$? Pour cette valeur, calculer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ayant pour densité f_c.

2) Si $Y = -\log(X)$. Montrer que Y suit une loi Gamma(α, β) et déterminer α et β.

Exercice 2. Soit f la fonction $f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2} 1_{\{x>0\}}$.

1) Montrer que f est une densité de probabilité. c'st la densité de la loi de Raleigh.

2) Soit X une variable aléatoire admettant pour densité f. Montrer que $Y = X^2$ admet une densité g que l'on précisera. Quelle est la loi de Y?

3) Calculer l'espérance et la loi de Y.

Exercice 3. La loi de Cauchy de paramètres $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$ est la loi sur $\mathbb{R}$ de densité:

$$f(x) = \frac{1}{\beta\pi} \frac{1}{1 + \frac{(x-\alpha)^2}{\beta^2}}.$$

1) Déterminer les $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $|X|^\gamma$ est intégrable.

2) Soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy de paramètre α et 1. Montrer que $Y = \frac{a}{X}$ avec $a \neq 0$ suit une loi de Cauchy dont on déterminera les paramètres.

3) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$ et $Y = a\tan(X)$ avec $a > 0$. Identifier la loi de Y.

4) Soit X suivant une loi de Cauchy de paramètre 0 et 1. Calculer $P(X > z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$ et montrer que

$$P(X > z) \sim_{z\to\infty} \frac{1}{\pi z}.$$

5) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variable aléatoire de même loi que X. Soit $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Montrer que pour tout $t > 0$ on a

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\frac{M_n}{n} \leq t\Big) = e^{-\frac{1}{\pi t}}.$$

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Montrer que $Y = e^X$ admet une densité. On appelle la loi de Y la loi lognormale.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, soit $r \in \mathbb{R}$ et soit

$$Z = \frac{1}{X^r}.$$

1) Pour quelle valeur de $p \in]0, \infty[$ a t'on $E(|Z|^p) < \infty$?

2) Déterminer la loi de Z.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Montrer que $Y = e^X$ admet une densité. On appelle la loi de Y la loi lognormale.

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On lui associe la variable $Y = \lfloor X \rfloor$ sa partie entière et $Z = X - Y$ sa partie fractionnaire.

1) Calculer la loi de Y.

2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de Z conditionnellement a l'événement $\{Y = k\}$.

3) En déduire la loi de Z, que peut on dire du couple (Y, Z).

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire positive qui admet une densité f continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $f(0) > 0$.

1) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y définie par

$$Y(\omega) = \frac{1}{X(\omega)} 1_{\{X(\omega) \neq 0\}}, \quad \omega \in \Omega.$$

2) Montrer que Y n'est pas intégrable.

Exercice 9. Soit X une variable aléatoire positive suivant une loi exponentielle de paramètre 1.

1) Déterminer la loi de la variable aléatoire $-X$.

2) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la loi de $Z = \log(1 - U)$ et calculer son espérance.

3) Calculer à présent la loi de la variable aléatoire W définie par

$$W = \log\left(\frac{1 - U}{U}\right).$$

4) Justifier l'intégralité de W et calculer son espérance.

5) Soyez astucieux et montrer que $E(W)$ peut être obtenue sans calcul.