Fiche TD 5

December 2, 2015

1 Variables aléatoires à loi mixtes, indépendances, fonctions caractéristiques.

Exercice 1. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes telles que X est absolument continues de densité f_X et Y est purement discrète de densité discrète p_Y et ne charge qu'un nombre fini de points $\{y_1, \dots, y_n\}$.
1) Calculer la fonction de répartition de $Z = X + Y$ en fonction de f_X et p_Y.
2) Montrer que Z est une variable aléatoire absolument continue et déterminer sa densité en fonction de f_X et p_Y.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire à loi mixte et de carré intégrable. Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $t \geq 0$ on a $P(X - E(X) \geq t) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{t^2 + \mathrm{Var}(X)}$.
1) Montrer que l'on peut supposer sans perte de généralité que $E(X) = 0$.
2) On suppose que $E(X) = 0$. Montrer que pour tout réel c tel que $c + t > 0$ on a

$$P(X \geq t) \leq \frac{\mathrm{Var}(X) + c^2}{(t + c)^2}.$$

3) Optimiser l'inégalité précédente en c pour conclure.
4) Application: On note sur 100 un examen et la moyenne obtenue est de 85 tandis que l'écart type est de 20. Donner une majoration de la proportion d'élève ayant obtenu plus de 95 en utilisant:

1. L'inégalité de Tchebyshev classique.
2. L'inégalité de Tchebyshev unilatérale ci-dessus.

Exercice 3. Soit $p \in]0, 1[$ et soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre p. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_n = X_n X_{n+1} \qquad \text{et} \qquad U_n = Y_1 + \cdots + Y_n.$$

1) Quelle est la loi de Y_n?
2) Pour quels couples (n, m) les variables Y_n et Y_m sont elles indépendantes?
3) Calculer l'espérance et la variance de U_n $(n \in \mathbb{N}^*)$.
4) Appliquer une inégalité classique pour montrer que $\frac{U_n}{n}$ converge en probabilité vers p^2 quand $n \to \infty$.

2 Convergence de variables aléatoires

Exercice 1. (Note: pas d'utilisation de Borel Cantelli.) Soit $\theta > 0$ et soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que X_1 suit une loi uniforme sur $[0, \theta]$. On a constaté en cours que $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ converge en proba vers θ quand $n \to \infty$. On veut prouver à présent que la convergence a lieu aussi P-presque surement.

1) Montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(M_n(\omega))_{n\geq 1}$ converge vers $M_\infty(\omega) \in \bar{\mathbb{R}}$. Prouver que, $P(M_\infty \leq \theta) = 1$.

On va à présent raisonner par l'absurde et supposer que $P(M_\infty < \theta) > 0$.

2) Montrer qu'il existe $\tilde{\theta} \in]0, \theta[$ tel que $P(M_\infty < \tilde{\theta}) > 0$.

3) Calculer $P(M_n \leq \tilde{\theta})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire une contradiction.

4) Conclure.

Exercice 2. Soit $\theta > 0$ et soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires telles que X_1 suit une loi uniforme sur $[0, \theta]$.

1) Montrer que $\log(X)$ est intégrable et calculer $m = E(\log(X))$.

2) Montrer que la suite $Y_n = (X_1 X_2 \dots X_n)^{\frac{1}{n}}$ converge vers e^m.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires à loi mixte, définies sur un même espace de proba. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{X_i}{1 + X_i}$$

converge P-presque surement quand $n \to \infty$ et donner une expression de sa limite.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que X_1 suit une loi de poisson de paramêtre $\lambda > 0$.

1) Calculer la fonction caractéristique de X_1. En déduire la loi de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

2) Appliquer le Théorème centrale limite à une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant une loi de Poisson de paramêtre 1 et en déduire la limite quand $n \to \infty$ de

$$u_n = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=0}^{n+\sqrt{n}} \frac{n^k}{k!}.$$

Exercice 5. Un programme de calcul utilise J chiffres significatifs après la virgule et arrondit tous les résultats d'opérations à ce format (donc à $\frac{1}{2}10^{-J}$ près). On suppose que l'ordinateur effectue 10^6 opérations élémentaires successives, que les erreurs commises pour chacune sont indépendantes, de loi uniforme sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}10^{-J}, \frac{1}{2}10^{-J}]$ et que l'erreur sur le résultat final est la somme des erreurs commises sur chaque opération. Evaluer la probabilité pour que l'erreur finale soit inférieure ou égale en valeur absolue à $\frac{1}{2}10^{-J+3}$.