Fiche TD 1

September 21, 2015

1 Famille Sommables.

Exercice 1.Les familles suivantes sont-elles sommables?

1) $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{m,n\in(\mathbb{N}^*)^2}$ avec $\alpha>0$.

2) $\left(\frac{1}{i^2}\right)_{i\in]0,1[}$

3) $\left(\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}\right)_{i,j\in\mathbb{N}^2}$. Dans ce dernier cas, on illustrera le fait que le théorème de sommation par paquets ne s'applique pas.

Exercice 2. En fonction de α et β réels, étudier la sommabilité des familles suivantes

1) $\left(\frac{1}{m^\alpha+n^\beta}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}}$.

2) $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha[\log(m+n)]^\beta}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}}$

Exercice 3. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{n^s}\right)_{(n,s)\in(\mathbb{N}\setminus\{0,1\})^2\}}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 4. On pose $\mathcal{H}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^*$.

1) Montrer que la série de fonction $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2-x^2}$ converge uniformément sur tout ensemble borné de $\mathcal{H}$.

2) Montrer que pour tout $x\in]-1,1[$, la famille $\left(\frac{x^{2p}}{n^{2+2p}}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ est sommable.

3) En déduire le développement en série entière de la fonction $f(x)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2-x^2}$ sur $x\in]-1,1[$.

2 Probabilités discrètes.

Exercice 5. Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ un espace de probabilité discret, soient A,B et C trois événements indépendants de Ω.

1) Montrer que $A\cap B$ est indépendant de C et que A^c,B sont indépendants.

2) Montrer que $A\cup B$ est indépendant de C.

3) Soient $A_1,\dots,A_n$ une famille d'événements indépendants. Montrer que $A_1^c,A_2,\dots,A_n$ sont indépendants. En déduire que toute famille $(B_1,\dots,B_n)\in\prod_{i=1}^n\{A_i,A_i^c\}$ est une famille d'événements indépendants.

4) Soient $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ une famille quelconque d'événements indépendants de (Ω, P). Montrer que toute famille $(B_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \prod_{i\in\mathcal{I}}\{A_i, A_i^c, \Omega, \emptyset\}$ est une famille d'événements indépendants.

Exercice 6. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité discret. Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements indépendants satisfaisant $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1$ Montrer qu'il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $P(A_k) = 1$.

Exercice 7. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité discret et soient $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ et $\beta \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe un espace de probabilité discret $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ contenant deux événements A et B tels que

$$P(B) = \beta, \quad P(A \,\big|\, B) = \alpha_1, \quad P(A \,\big|\, B^c) = \alpha_2.$$

Indication: on pourra considérer Ω de la forme $\{a_1, a_2\} \times \{b_1, b_2\}$ et $A = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2)\}$ et $B = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1)\}$. Puis on montrera qu'il existe une unique probabilité sur Ω qui vérifie les conditions précédentes.

Exercice 8. Pour tout $s > 1$ on définit $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ la fonction zeta de Riemann. On note également $\mathfrak{P} = \{2, 3, 5, \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers de $\mathbb{N}$.

1) Montrer que pour tout $s > 1$, la fonction p_s définie par $p_s(n) = \frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{n^s}$ est bien une densité discrète sur $\mathbb{N}$. On notera P_s la probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ associée p_s.

2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on pose $M_k = \{kn, n \in \mathbb{N}^*\}$ l'ensemble des entiers naturels multiple de k. Calculer $P_s(M_k)$.

3) Déterminer, pour $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, l'ensemble $M_p \cap M_q$.

4) Soient $q_1, \dots, q_r$ des nombres premiers de $\mathbb{N}$. Calculer $P(M_{q_1 \dots q_r})$.

5) Montrer que les évènements $(M_q)_{q\in\mathfrak{P}}$ sont indépendants sous P_s.

6) Déterminer $H = \cap_{q\in\mathfrak{P}}\big(M_q\big)^c$.

7) En conclure en utilisant la question 4) de l'exercice 5) que la formule suivante est vraie pour tout $s > 1$:

$$\xi(s) = \prod_{q\in\mathfrak{P}} \Big(\frac{1}{1 - p^{-s}}\Big).$$

Exercice 9 (paradoxe des deux fils).

Un femme a deux enfants. En supposant que chaque enfant est un garçon ou une fille avec la même probabilité et indépendamment, répondez aux question suivantes.

1) Sachant que le premier enfant est un garçon, qu'elle est la probabilité pour que le second soit aussi un garçon?

2) Sachant que le second enfant est un garçon, qu'elle est la probabilité pour que le premier soit aussi un garçon?

3) sachant que l'un des enfants est un garçon, qu'elle est la probabilité pour que les deux enfants soient des garçons?

Exercice 10. Soit S_n l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. Pour $\sigma \in S_n$ et $\mathcal{I} \subset \{1, \dots, n\}$ donnés, on dit que $\mathcal{I}$ est stable par σ si pour tout $i \in \mathcal{I}$, $\sigma(i) \in \mathcal{I}$. On note $A_{\mathcal{I}}$ l'ensemble des permutations de S_n qui laissent stable $\mathcal{I}$. Si P est la probabilité uniforme sur S_n, calculer $P(A_{\mathcal{I}})$.