Fiche TD 2

October 5, 2015

1 Variables aléatoires discrètes.

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\omega), P)$ un espace de probabilité discret. Soient A et B deux événements de Ω et soient $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}$, nous considérons la variable aléatoire

$$X = \lambda\, 1_A + \beta\, 1_B.$$

Déterminer la densité discrète de X.

Exercice 2.
1) Soit X une variable aléatoire uniformément distribuée sur $\{0, 1, \ldots, n\}$. Calculer $E(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
2) Soit Y une v.a. uniformément distribuée sur $\{-n, -(n-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1, n\}$. Calculer $E(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$.
1) Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k\, P(X = k) = \left[\sum_{k=1}^{n} P(X \geq k)\right] - nP(X \geq n+1).$$

2) Montrer que si $E(X) < \infty$, alors

$$\lim_{n\to\infty} n\, P(X \geq n+1) = 0.$$

3) Conclure que dans tous les cas $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$.
4) Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires i.i.d. à valeur dans $\mathbb{N}$, calculer l'espérance de $\inf_{1\leq i\leq n} X_i$ en fonction des $r_k = P(X_1 \geq k)$.

Exercice 4. Dans un jeu de pile ou face où les jets sont supposés indépendants et où la probabilité d'obtenir pile à chaque jet est p ($p \in [0, 1]$), on note X_r le nombre de lancers nécessaires pour obtenir r piles.
1) Montrer que pour tout $k \geq r$,

$$P(X_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}.$$

La loi de la variable aléatoire X_r est la loi binomiale négative de paramètres (r, p).

2) Montrer que $E(X_r) = \frac{r}{p}$ et $E(X_r\,(X_r+1)) = \frac{r(r+1)}{p^2}$. En déduire $\mathrm{Var}(X_r)$.

3) Retrouver les résultats précédents en remarquant que X_r peut s'écrire sous la forme $Y_1 + \cdots + Y_r$ avec $Y_1, \ldots, Y_r$ des variables i.i.d. dont on donnera la loi.

Exercice 5. Une boite contient n cartes numérotées de 1 à n.

1) On tire sans remise r cartes ($r \leq n$) de la boite et l'on appelle X le plus grands des r numéros obtenus. Quelle est la loi de X? En déduire que

$$E(X) = \frac{r(n+1)}{r+1} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{r(n+1)(n-r)}{(r+2)(r+1)^2}.$$

2) On tire au hasard avec remise r cartes de la boite et on note encore X le plus grand numéro obtenu. Calculer $P(X \leq k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et en déduire la loi de X.

Exercice 6. Soit T une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(T \geq n) > 0$. On appelle taux de panne la suite $\theta(n) = P(T = n \,|\, T \geq n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(1) Calculer $P(T = n)$ en fonction des $(\theta(k))_{0 \leq k \leq n}$.

(2) Etablir qu'une suite de réels $(\theta(k))_{k \in \mathbb{N}}$ convient comme taux de panne si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \theta(k) < 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \theta(k) = +\infty.$$

(3) Montrer que T suit une loi géométrique si et seulement si la suite $(\theta(k))_{k \in \mathbb{N}}$ est constante.

Exercice 7. Soit $\nu, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Les X_i sont toutes de même loi. Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $T = 0$ si $\nu = 0$ et $T = S_n$ si $\nu = n \geq 1$.

1) Exprimer la fonction génératrice de S_n en fonction de celle de X_1.

2) Exprimer la fonction génératrice de T en fonction de celle de X_1 et de ν.

3) Si $P(X_1 = 1) = p = 1 - P(X_1 = 0)$, trouver la loi de T quand ν suit une loi géométrique, puis une loi de Poisson.

Exercice 8. Soient Y, Z deux variables aléatoires indépendantes telles que Y est de loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, l-1\}$ et $X = Y + Z$ est de loi uniforme de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ avec l, n, m entiers tels que $n = lm, l > 1, m > 1$. Déterminer la fonction génératrice de Z, puis la loi de Z.

Exercice 9. Soient Y, Z deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. On pose $S = X + Y$.

1) Montrer que S est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

2) Montrer que la loi conditionnelle de X sachant $S = n$ est une binomiale.

3) Si $\lambda = \mu$, calculer la fonction génératrice de $2X + 3Y$.