

$K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un K -ev de dim finie

I - Action par translation

1) Action de $GL_n(K)$ et pivot de Gauss

[H2G2] p128 Motivation: on souhaite résoudre $AX = Y$ avec $A \in M_{m,n}(K)$, et $Y \in M_{m,1}(K)$. Cela revient à résoudre $PAX = PY$ avec $P \in GL_m(K)$ de sorte que PA soit simple (diagonale, triangulaire).

[H2G2] p129 **Def/Prop 1**: $GL_m(K)$ agit sur $M_{m,n}(K)$ par multiplication à gauche: $GL_m(K) \times M_{m,n}(K) \rightarrow M_{m,n}(K)$
 $(P, M) \mapsto PM$

On parle d'action par translation à gauche.

[H2G2] p131 **Prop 2**: Deux matrices A et A' de $M_{m,n}(K)$ sont dans la même orbite sous $GL_m(K)$ ssi elles ont le même noyau: ie $\exists P \in GL_m(K), A' = PA \Leftrightarrow \text{Ker}(A) = \text{Ker}(A')$

[H2G2] p130 **Def 3**: On appelle pivot d'une ligne non nulle, le coefficient non nul situé dans la colonne la plus à gauche. Une matrice est dite échelonnée en lignes si elle vérifie les conditions:

↳ si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes sont nulles

↳ le pivot d'une ligne est strictement plus à droite que les pivots des lignes précédentes.

Une matrice échelonnée est dite réduite si de plus tous les pivots sont égaux à 1, et les pivots sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.

[H2G2] p130 **Ex 4**: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée en lignes réduite.

[H2G2] p130 **Rmq 5**: Une matrice est dite échelonnée en colonnes si sa transposée est échelonnée en lignes.

[H2G2] p131 **Thm 6**: Toute matrice est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée en lignes réduite:

$M_{m,n}(K) = \bigsqcup_{E \in \mathcal{E}_{m,n}} GL_m(K) \cdot E$ à $\mathcal{E}_{m,n}$ est l'ensemble des

matrices échelonnées en lignes réduites de taille $m \times n$.

[H2G2] p131 **Méthode 7**: Par la méthode du pivot de Gauss, on montre que toute matrice est dans l'orbite d'une matrice échelonnée avec des multiplications à gauche par des matrices inversibles correspondant à des opérations élémentaires sur les lignes.

Rmq 8: Par transposition, on obtient: A et A' sont dans la même orbite* sous $GL_m(K)$ ssi elles ont la même image: $\exists Q \in GL_m(K), A' = AQ^{-1} \Leftrightarrow \text{Im}(A) = \text{Im}(A')$.
 * par l'action à droite.

Appli 9:
 • calcul du rang d'une matrice
 • résolution de systèmes linéaires et réduction à la forme échelonnée
 • calcul de l'inverse d'une matrice

Def 10: On appelle dilatation une matrice $D_{i,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ avec i -tg $d_{ii} = \alpha$ et $\alpha \in K \setminus \{0\}$.

On appelle transvection une matrice $T_{i,j,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + \beta E_{ij}$

Prop 11: On a $D_{i,\alpha} A$ donne $L_i \leftarrow \alpha L_i$ et $T_{i,j,\beta} A$ donne $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$

Prop 12: Les dilatations et les transvections engendrent $GL_n(K)$

Thm 13: Décomposition de Bruhat (DEV1)

2) Action de $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$

$U_n(\mathbb{C})$ agit sur $M_n(\mathbb{C})$ par translation à gauche: $(U, M) \mapsto UM$

Prop 14: (Décomposition polaire) $\forall M \in GL_n(\mathbb{C}), \exists! (U, H) \in U_n(\mathbb{C}) \times H_n^{++}$ tel que $M = UH$. Toute matrice de $GL_n(\mathbb{C})$ contient une unique matrice de $H_n^{++}(\mathbb{C})$ dans son orbite sous l'action de $U_n(\mathbb{C})$.

De même, $O_n(\mathbb{R})$ agit sur $M_n(\mathbb{R})$ par translation à gauche.

Prop 15: $\forall M \in GL_n(\mathbb{R}), \exists! (O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$. Toute matrice de $GL_n(\mathbb{R})$ contient une unique matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ dans son orbite sous l'action de $O_n(\mathbb{R})$.

II - Action de Steinitz

1) Rang et orbite

Def/Prop 16: $GL_m(K) \times GL_n(K)$ agit sur $M_{m,n}(K)$ par équivalence: par $(GL_m(K) \times GL_n(K)) \times M_{m,n}(K) \rightarrow M_{m,n}(K)$
 $((P, Q), A) \mapsto PAQ^{-1}$

on l'appelle action de Steinitz.

Def 17: B est dite équivalente à A si A et B sont dans la même orbite par cette action: ie $\exists (P, Q) \in GL_m(K) \times GL_n(K)$ tel que $B = PAQ^{-1}$

[H2G2] p133

[H2G2] p144

[H2G2] p144

[H2G2] p19 (FGNodg1) p347

[H2G2] p202

[H2G2] p202

[H2G2] p4

[H2G2] p4

[H2G2]
p4

Rmq 18 : Cette action traduit un changement de bases au départ et à l'arrivée par un endomorphisme

[H2G2]
p5
(DEV2)

Thm 19 : Deux matrices sont dans la même orbite ssi elles ont le même rang. En particulier, les orbites sont paramétrées par le rang entier compris entre 0 et $\min(m, n)$

[H2G2]
p3

Csq 20 : Un système de représentants des orbites est $\{J_r \mid r \in [0, \min(m, n)]\}$ et $J_r = \begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

[OAJ]
p155

Appli 21 : On a $\text{rg}(A) = \text{rg}(tA)$

[OAJ]
p156

Appli 22 : Soit $A \in M_{m,n}(K)$ et K un corps contenant k . Le rang de $A \in M_{m,n}(K)$ est le même que celui de $A \in M_{m,n}(k)$

[OAJ]
p156

Appli 23 : On reprend $k \subset K$. Deux matrices équivalentes dans $M_{m,n}(K)$ le sont aussi dans $M_{m,n}(k)$

[OAJ]
p155

2) Topologie matricielle

Prop 24 : $GL_n(K)$ est dense dans $M_n(K)$ i.e avec $A \in GL_n(K)$ de rang r , $A = P J_r Q^{-1}$ et $P(J_r + \frac{I_d}{p})Q \xrightarrow{p \rightarrow \infty} A$

[H2G2]
p9

Thm 25 : Soit $r \in \mathbb{N}$ tq $0 \leq r \leq \min(m, n)$, on note O_r l'orbite des matrices de rang r de $M_{m,n}(K)$ alors l'adhérence $\overline{O_r}$ est donnée par $\overline{O_r} = \bigcup_{0 \leq k \leq r} O_k$ (DEV2)

[H2G2]
p11

Coro 26 : La seule orbite fermée est $O_0 = \{0\}$. L'unique orbite ouverte est $O_{\min(m,n)}$. En particulier si $m=n$, $GL_n(K)$ est ouvert dans $M_n(K)$

[MT]
p36
ou [H2G2]
p30

Thm 27 : Si $p \leq n-1$ alors O_p est une partie connexe de $M_n(K)$

III - Action par conjugaison

1) Généralités

[GOU]
p121

Def / Prop 28 : $GL_n(K)$ agit sur $M_n(K)$ par $GL_n(K) \times M_n(K) \rightarrow M_n(K)$ $(P, n) \rightarrow PMP^{-1}$. On parle d'action par conjugaison.

[GOU]
p121

Def 29 : Deux matrices dans la même orbite sont dites semblables

Prop 30 : Si A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$ alors elles le sont sur $\mathbb{R}$

[GOU]
p158

Prop 31 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$, B et B' sont deux bases de E avec P la matrice de passage de B à B' alors $\text{Mat}_{B'}(f) = P^{-1} \text{Mat}_B(f) P$. La conjugaison traduit donc un changement de base par un endomorphisme.

[GOU]
p121

Def 32 : Soit $A \in M_n(K)$. A est dite diagonalisable (resp trigonalisable) si A est semblable à une matrice diagonale (resp triangulaire supérieure)

[GOU]
p163-164

Appli 33 : Calcul de puissance : $A^n, n \in \mathbb{N}$

Prop 34 (Jordan) : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme caractéristique χ_f soit scindé sur K avec $\chi_f = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{d_i}$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ par $i \neq j$) alors il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f soit de la forme :

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \\ 0 & \ddots & \\ 0 & & A_s \end{pmatrix} \text{ avec } \forall i \in [1, s], A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{matrix} v_{i,j} \in [0, d_i-1] \\ v_{i,j} \end{matrix}$$

[GOU]
p199

Appli 35 : Met 2 M sont semblables ssi M est nilpotente avec $n \in M_n(\mathbb{C})$

[GOU]
p201

Appli 36 : Met 2 M sont semblables dans $M_n(\mathbb{C})$

[GOU]
p201

Rmq 37 : Par la prop 30, M et tM sont aussi semblables dans $M_n(\mathbb{R})$

[GOU]
p202

2) Invariants de similitude

Thm 38 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une suite $F_1, \dots, F_r$ de sev de E tous stables par f telle que :

$$E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$$

$\forall i \in [1, r], f|_{F_i}$ est un endomorphisme de F_i cyclique

$\forall i \in [1, r], P_i$ est un polynôme cyclique

La suite de polynômes $P_1, \dots, P_r$ ne dépend que de f et non du choix de la décomposition et est appelée suite des invariants de similitude de f .

Def 39 : Soit $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0 \in K[X]$. On appelle matrice compagnon de P la matrice $C(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in M_p(K)$

[GOU]
p290

Thm 40 (Réduction de Frobenius) : Si $P_1, \dots, P_r$ est la suite des invariants de similitude de $f \in \mathcal{L}(E)$ alors $\exists B$ base de E telle que $\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} C(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C(P_r) \end{pmatrix}$ on a de plus $P_i = \chi_{f|_{F_i}}$ et $P_1 \dots P_r = \chi_f$

[GOU]
p291

[Gow]
p291

Coro 41 : Deux matrices sont semblables si et seulement si elles ont même invariants de similitude.

3) Actions de $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$

• $O_n(\mathbb{R}) \curvearrowright M_n(\mathbb{R})$ par $O.M = OMO^{-1} = OM^tO$

[Gow]
p260

Thm 42 : Réduction des endomorphismes normaux :

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal (ie $u^*u = uu^*$) alors il existe une base orthonormale B de E telle que $\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & \tau_1 & \dots & \tau_s \end{pmatrix}$ où $\lambda_i, \tau_j \in \mathbb{R}$ et $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$

(DEV3)

[Gow]
p244

Thm 43 : Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ alors M est diagonalisable dans $\mathbb{R}^{n \times n}(\mathbb{R})$ dans une base orthonormée : ie si $M \in S_n(\mathbb{R})$, son orbite sous l'action de $O_n(\mathbb{R})$ contient une matrice diagonale réelle

[Gow]
p261

Thm 44 : Soit $M \in A_n(\mathbb{R})$ alors l'orbite de M sous l'action de $O_n(\mathbb{R})$ contient une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \tau_s \end{pmatrix}$ avec $\tau_i = \begin{pmatrix} 0 & b_i \\ -b_i & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{J}_2(\mathbb{R})$

[MT]
p35

Thm 45 : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs

• $U_n(\mathbb{C}) \curvearrowright M_n(\mathbb{C})$ par $U.M = UMU^*$

[Gow]
p258

Prop 46 : Si $M \in U_n(\mathbb{C})$, l'orbite de M sous $U_n(\mathbb{C})$ contient une matrice $\text{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$ où $\theta_i \in \mathbb{R}$

[Gow]
p259

Prop 47 : Si M est normale avec $M \in M_n(\mathbb{C})$ alors l'orbite de M sous l'action de $U_n(\mathbb{C})$ contient une matrice diagonale

[Gow]
p261

Thm 48 : Si $M \in M_n(\mathbb{C})$ tq $M^* + M = 0$ alors son orbite sous $U_n(\mathbb{C})$ contient une matrice diagonale à coefficients imaginaires purs.

[Gow]
p244

Prop 49 : Si $M \in M_n(\mathbb{C})$ hermitienne alors son orbite sous $U_n(\mathbb{C})$ contient une matrice diagonale réelle.

[Gow]
p245

App 50 : (Racine carré d'une matrice hermitienne positive)
Soit $H \in M_n^+(\mathbb{C})$ alors il existe une unique matrice $R \in M_n^+(\mathbb{C})$ telle que $H = R^2$

IV - Action par congruence

Def 51 : L'action de congruence est l'action de $GL_n(K)$ sur $S_n(K)$ définie par $GL_n(K) \times S_n(K) \rightarrow S_n(K)$
 $(P, M) \mapsto PM^tP$

[H2G2]
p150

Deux matrices A et A' de $S_n(K)$ sont dites congruentes si elles appartiennent à la même orbite pour l'action de congruence.

Rmq 52 : Deux matrices sont congruentes ssi elles sont les matrices d'une même forme quadratique dans des bases différentes

[H2G2]
p150

Thm 53 : (Sylvester). Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Il existe deux entiers p et r avec $1 \leq p \leq r$ uniquement déterminés par A , et $G \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que $GA^tG = \begin{pmatrix} I_p & & & 0 \\ & -I_{r-p} & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} := I_{p,r-p}$

[H2G2]
p182

Cela signifie que les orbites sont classées par les couples $(p, r-p)$ et un système de représentants des orbites est $\{ I_{p,r-p} \mid r \in \mathbb{N} \text{ et } p \in \{0, r\}\}$

Rmq 54 : De façon équivalente, pour r et p entiers avec $0 \leq p \leq r$ soit $\mathcal{O}_{p,r-p}$ l'ensemble des matrices dont la forme quadratique associée possède p carrés positifs et $r-p$ carrés négatifs. Les orbites de l'action de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $S_n(\mathbb{R})$ sont les $\mathcal{O}_{p,r-p}$, $0 \leq p \leq n$.

[H2G2]
p182

Thm 55 : Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$ (DEV4)

[SZP]
p330

Prop 56 : Si A et $A' \in S_n(\mathbb{C})$ alors A et A' sont dans la même orbite ssi elles ont même rang.

[H2G2]
p151

Prop 57 : Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ alors $\exists V$ un voisinage de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\psi: V \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall A \in V$, $A = \psi(A) A_0 \psi(A)$

[ROW]
p209

[H2G2]: Histories hédonistes de groupes et de géométries. Caldero-Germoni

[GOU]: Gourdon Algèbre 2^e édition

[CA]: Objectif Agrégation

[MT]: Mneime-Testard Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques

[SZP]: Szpirglas, Algèbre L3

[FGN alg 1]: Oaux X-ENS alg 1

[ROU]: Rouvière