161

ISOMÉTRIES D'UN ESPACE AFFINE EUCLIDIEN DE DIMENSION FINIE. APPLICATIONS EN DIMENSIONS 2 ET 3.

Cadre : $\mathcal{E}$ désigne un espace affine euclidien de dimension $n \geq 1$ de direction E.

I. Généralités

1. Définitions [MER] p. 255-256

Déf 1 : On appelle isométrie de $\mathcal{E}$ (ou isométrie affine) toute application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui conserve les distances, ie : $\forall M, N \in \mathcal{E}$, $f(M)f(N) = MN$.
On note $Is(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries.

Ex 2 : - Les translations sont des isométries.
- Une homothétie est une isométrie ssi son rapport est de module 1. [AUD] p. 53

Thm 3 : $f \in Is(\mathcal{E}) \Leftrightarrow f$ est affine de partie linéaire une application orthogonale.

Rq : Toute isométrie de $\mathcal{E}$ est bijective et $Is(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $(GA(\mathcal{E}), \circ)$ (groupe des applications affines bijectives de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$). [MER] p. 47

Déf 4 : • Soit $f \in Is(\mathcal{E})$, on note $L(f)$ sa partie linéaire. Le groupe des déplacements est défini par :
$$Is^+(\mathcal{E}) = \{ f \in Is(\mathcal{E}) \mid L(f) \in SO(\vec{\mathcal{E}}) = SO(E) \}$$
• $Is^-(\mathcal{E}) = Is(\mathcal{E}) \setminus Is^+(\mathcal{E})$ est l'ensemble des antidéplacements de $\mathcal{E}$.

Prop/Déf 5 : Si $O \in \mathcal{E}$, $Is_O(\mathcal{E}) = \{ f \in Is(\mathcal{E}) \mid f(O) = O \}$ est le stabilisateur du point O dans le groupe $Is(\mathcal{E})$, c'est un sous-gpe de $Is(\mathcal{E})$. De plus,
$$L : \begin{array}{rcl} Is_O(\mathcal{E}) & \longrightarrow & O(\vec{\mathcal{E}}) \\ f & \longmapsto & L(f) \end{array}$$
est un isomorphisme de groupe. $(O(\vec{\mathcal{E}}) = O(E))$

2. Exemples et propriétés

Thm 6 : Toute isométrie affine f s'écrit de façon unique
$$f = t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}}$$
où $\vec{u} \in Inv\, L(f)$ et g est une isométrie qui possède au moins un point fixe. [MER] p. 257

Déf 7 : • Soit $F \subset E$ un sev, la symétrie orthogonale s_F par rapport à F est l'application linéaire tq :
$$s_F|_F = Id_F \quad \text{et} \quad s_F|_{F^\perp} = -Id_{F^\perp}.$$
• Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sea de direction F et $O \in \mathcal{F}$. La symétrie orthogonale affine $\sigma_{\mathcal{F}}$ est définie par
$$\sigma_{\mathcal{F}}(M) = M' \quad \text{ssi} \quad \overrightarrow{OM'} = s_F(\overrightarrow{OM}).$$
(voir Annexe 1) [AUD] p. 54.

Rq : Les réflexions sont les symétries orthogonales par rapport à des hyperplans. [AUD] p. 54.

Déf 8 : On appelle symétrie glissée $f = t_{\vec{a}} \circ \sigma_F$, composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation. [COM] p. 159

Thm 9 : Soit $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$. Soit $(B_0, \dots, B_n) \in \mathcal{E}^n$ tq $B_iB_j = A_iA_j$ $\forall i, j$. Alors $\exists! f \in Is(\mathcal{E})$ tq $f(A_i) = B_i$ $\forall i$. [MER] p. 262
De plus, $(B_0, B_1, \dots, B_n)$ sera un repère affine.

Application 10 : (ABC et $A'B'C'$ sont dits isométriques (dans cet ordre) si $\exists f \in Is(\mathcal{E})$ tq $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$)
ABC et $A'B'C'$ sont isométriques ssi ils vérifient l'une des assertions suivantes : [MER] p. 264.
1) $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$
2) $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, et $\hat{B} = \hat{B}'$
3) $AB = A'B'$, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$

II. Etude de $O(E)$

1. Réduction et générateurs

Prop 11 : Soit $F \subset E$ un sous-espace d'un ev euclidien stable par une isométrie f. Alors $F^\perp$ est stable par F. [AUD] p. 54

Prop 12 : Soit f une isométrie vectorielle de E. Alors
$$E = V \oplus W \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_r \quad \text{avec} \quad \dim P_i = 2 \ \forall i$$
et où $V, W, P_1, \dots, P_r$ sont stables par f et :
$$f_{|V} = Id_V, \quad f_{|W} = -Id_W \quad \text{et} \quad f_{|P_i} \text{ est une rotation } \forall i.$$
[AUD] p. 64-65.

Matriciellement, $\exists$ une BON de E telle que la matrice de f soit :

$$\begin{pmatrix} I_p & & & & 0 \\ & -I_q & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix}$$

avec $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$ $\quad p = \dim V$, $q = \dim W$.

<u>Ex 13</u>: Si $\dim W = 1$ et $r=0$, on dit que f est une réflexion [PER] p.125

<u>Application 14</u>: Le groupe $Is^+(\mathcal{E})$ des déplacements d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ est connexe par arcs [AUD] p.66

[PER] p.121

<u>Déf 15</u> : Soit f une isométrie vectorielle de E telle que $\exists\, V, W$ stable par f tq $E = V \oplus W$, $f_{|V} = Id_V$, $f_{|W} = -Id_W$ et $\dim W = 2$. On dit que f est un renversement.

DVPT 1

<u>Thm 16</u>: $O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales, si $f \in O(E)$, f est produit de au plus n réflexions.

[PER] p.143

<u>Thm 17</u>: Toute isométrie de $\mathcal{E}$ peut s'écrire comme composée de p réflexions avec $p \leq n+1$. [AUD] p.57

DVPT 1

<u>Thm 18</u>: Pour $n \geq 3$, $SO(E)$ est engendré par les renversements, si $f \in SO(E)$, f est produit d'au plus n renversements.

DVPT 2

<u>Application 19</u> : Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$. [FGN] Al 3.

2. Propriétés topologiques

En choisissant une BON de E, on peut identifier $O(E)$ à $O_n(\mathbb{R})$

<u>Prop 20</u>: $O_n(\mathbb{R})$ est compact. [AUD] p.61

<u>Prop 21</u>: (Décomposition polaire) Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$ alors $\exists!\ (O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $P = OS$. [H2G2] p.202.

<u>Corollaire 22</u>: (Maximalité de $O_n(\mathbb{R})$) Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ qui contient $O_n(\mathbb{R})$ est le groupe $O_n(\mathbb{R})$ lui-même. [H2G2] p.205

<u>Application 23</u>: Soit E un espace euclidien et $B = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid |||u||| \leq 1\}$. Alors les points extrémaux de B sont exactement les éléments de $O(E)$. [FGN] Al 3.

III - Classification des isométries du plan et de l'espace

1- En dimension 2 [AUD] p.87, [COM] p.164

Les isométries du plan affine euclidien sont les translations, les réflexions et les symétries glissées.

On peut dresser le tableau suivant :

	translations	rotations	réflexions	symétries glissées.
ensemble invariant	$\emptyset$	un unique point invariant.	une droite de points fixes	$\emptyset$
matrice de $L(f)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ où θ est l'angle de rotation	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
	déplacements		antidéplacements	

(voir dessins annexe 2)

2 - En dimension 3 [COM] p.168-169

On note $E_1 = \ker(L(f) - Id_E)$ (Annexe 3)

	Déplacements		Antidéplacements	
$\dim(E_1)$	3	1	2	0
Il existe des points fixes.	$Id_{\mathcal{E}}$	rotations axiales	symétries planes	rotations-symétries
Il n'existe pas de point fixe	translations	vissages	symétries glissées	

IV. Groupe d'isométrie préservant une partie du plan ou de l'espace.

Déf 24: Si $P \subset \mathcal{E}$, on note $Is(P)$ (resp. $Is^+(P)$, $Is^-(P)$) l'ensemble des isométries affines (resp. les déplacements, les antidéplacements) f telles que $f(P) = P$. [MER] p. 277

Prop 25: $(Is(P), \circ)$ est un groupe et $Is^+(P)$ est un sous-groupe de $Is(P)$. [MER] p. 277

1. Polygones réguliers (dimension 2) [MER] p. 286-291

Thm 26: Soit $n \geq 3$, $P_n = A_0A_1 \dots A_{n-1}$ un polygone à n sommets $\neq$ 2 à 2. Alors :
[(1) P_n est inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ et $A_kA_{k+1} = A_0A_1$ $\forall k$]
$\iff$ [(2) $\exists$ une rotation r tq $r(A_k) = A_{k+1}$ $\forall k$]

Déf 27: Un polygone $P_n = A_0A_1 \dots A_{n-1}$ vérifiant l'une des conditions précédentes est un polygone régulier à n sommets. De plus, P_n est convexe si l'angle θ de r est $\theta = \pm \frac{2\pi}{n}$ $[2\pi]$.

Thm 28: $Is^+(P_n) = \{Id, r, \dots, r^{n-1}\}$ est le groupe cyclique d'ordre n engendré par la rotation r.

Rq: $Is^+(P_n) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq U_n$

Thm 29: Il y a exactement n réflexions laissant P_n globalement invariant, ce sont les réflexions d'axes (OA_k) ou les médiatrices des arêtes $[A_kA_{k+1}]$ $(0 \leq k \leq n)$

Rq: $\forall k \in [\![0, n[\![$, on pose $s^k = r^k \circ s_{OA_0}$ alors
$$Is^-(P_n) = \{s_k \mid 0 \leq k < n\}.$$

Déf 30: $Is(P_n)$ est appelé groupe diédral d'indice n, il est noté D_n.

Thm 31: D_n est un groupe fini d'ordre $2n$, engendré par un élément r d'ordre n et un élément s d'ordre 2.

Ex 32: Le groupe des isométries du triangle équilatéral est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$, ie : $D_3 \simeq \mathfrak{S}_3$.

2. Polyèdres réguliers (dimension 3)

* **Groupe du cube** [MER] p. 297-302

Déf 33: On appelle $Is(\mathcal{C})$ l'ensemble des isométries affines laissant le cube $\mathcal{C} = ABCDEFGH$ globalement invariant.

Thm 34: L'image d'une face (resp. une arête, un sommet) du cube par $f \in Is(\mathcal{C})$ est une face (resp. une arête, un sommet). De plus, $\forall f \in Is(\mathcal{C})$, l'isobarycentre O des sommets est un point fixe de f.

Thm 35: Il y a 24 rotations laissant le cube invariant :
- l'identité,
- 9 rotations d'axes perpendiculaires aux faces passant par O et d'angles $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.
- 8 rotations d'axes les diagonales du cube et d'ordre 3.
- 6 retournements d'axes les droites joignant les milieux d'arêtes opposées. (Annexe 4)

Thm 36: Il y a 24 antidéplacements laissant $\mathcal{C}$ invariant :
- 6 réflexions par rapport à un plan contenant des arêtes opposées
- 3 réflexions par rapport aux plans médiateurs des arêtes
- la symétrie par rapport à O.
- 14 symétries-rotations n'admettant que O comme point fixe.

Prop 37: $Is(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $Is^+(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4$. [H2G2] p. 364

* **Groupe du tétraèdre** [MER] p. 302-305

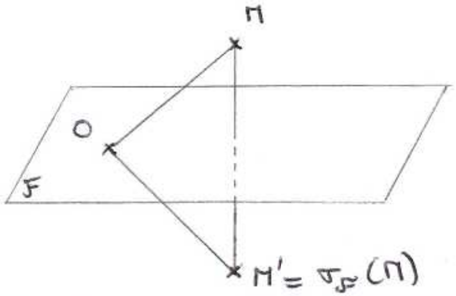
Déf 38: On appelle $Is(T)$ l'ensemble des isométries affines laissant le tétraèdre $T = ABCD$ globalement invariant. (Annexe 4)

Thm 39: Il y a 12 rotations laissant T invariant :
- l'identité,
- 8 rotations d'axe passant par O et par un sommet de T et d'angles $\pm \frac{2\pi}{3}$.
- 3 retournements d'axe joignant les milieux de 2 arêtes opposées.

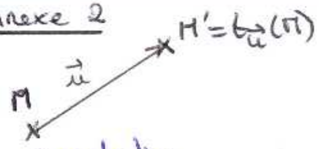
Thm 40: Il y a 12 antidéplacements laissant T invariant :
- 6 réflexions par rapport aux plans médiateurs de chaque arête.
- 6 symétries-rotations.

Prop 41: $Is(T) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $Is^+(T) \simeq \mathcal{A}_4^{+}$ [H2G2] p.363.

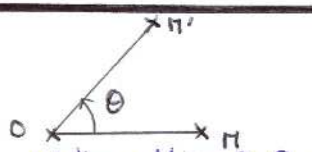
Annexe 1: Symétrie orthogonale affine.



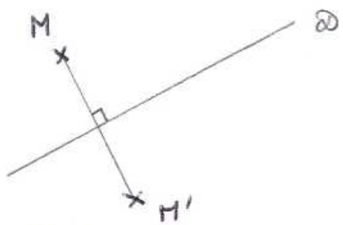
Annexe 2



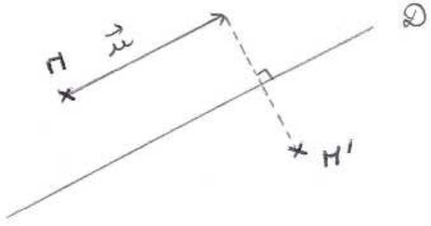
translation



rotation d'angle θ.

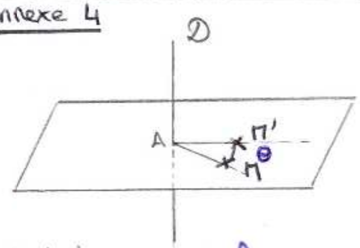


réflexion.

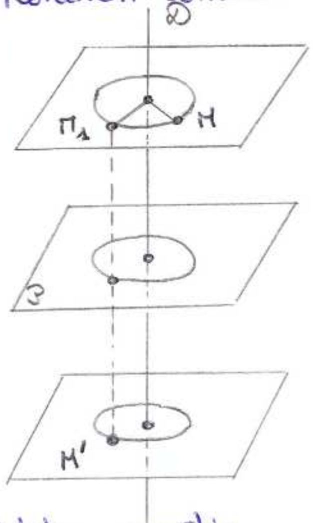


symétrie glissée.

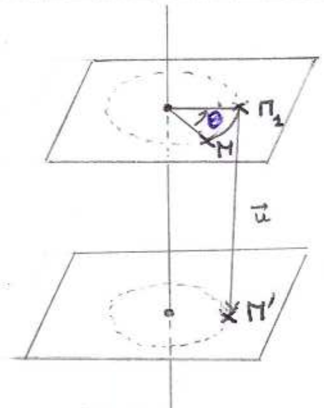
Annexe 4



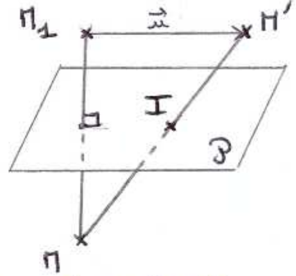
Rotation axiale.



Rotation-symétrie.

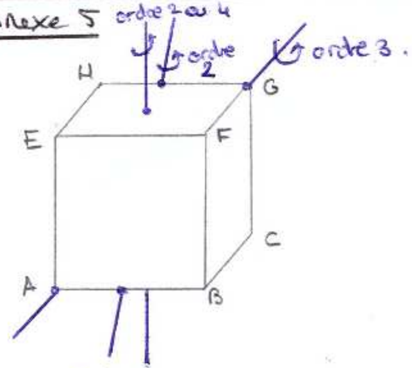


vissage.

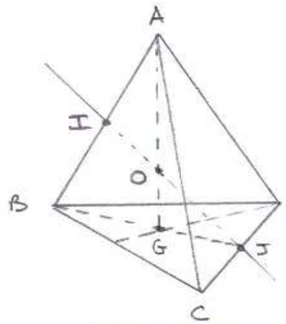


Symétrie glissée.

Annexe 5



Cube



tétraèdre

[MER] : Mercier, Cours de géométrie.
[AUD] : Audin, Géométrie.
[COM] : Combes, Algèbre et géométrie.
[PER] : Perrin, Cours d'algèbre.
[H2G2] : Caldero, Germoni, H2G2.
[FGN] : Oraux X-ENS, Algèbre 3.