

Thm 18 (Brouwer en dimension 1)

Toute fonction continue $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ possède un point fixe

Application Théorème de Sarkowski

4) Composantes connexes

Déf 19 Soit la relation binaire $\sim$ dans E par:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists C \text{ connexe de } E, x \in C, y \in C.$$

cette relation est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence de $\sim$ s'appellent les composantes connexes de E . On note $C(x)$ la classe d'équivalence de x .

Rq 20 Les composantes connexes forment une partition de E .

Rq 21 E est connexe $\Leftrightarrow$ il a 1 seule composante connexe.

Prop 22 1) $C(x)$ est la réunion de tous les connexes contenant x ; c'est aussi le plus grand connexe contenant x .

2) $C(x)$ est fermé dans E .

Prop 23 Si $E = \bigcup_I w_i$ où les w_i sont ouverts connexes non vides, alors les w_i sont les composantes connexes de E .

Ex 24: $E =]-\infty, x[\cup]y, +\infty[$ $x < y$

II) Connexité par arcs et par lignes brisées.

1) Définitions et propriétés de la connexité par arcs

Déf 25 Deux points a et b de E sont dits équivalents ($a \sim b$) s'il existe une application continue $f: [0, 1] \rightarrow E$ telle que $f(0) = a$, $f(1) = b$; f s'appelle un chemin joignant a à b dans E .

Déf 26 E est dit connexe par arcs si deux points quelconques a, b de E sont toujours équivalents, autrement dit s'il existe toujours un chemin joignant a à b dans E .

Ex 27 $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont connexes par arcs.

Thm 28 1) E connexe par arcs $\Rightarrow E$ connexe

2) La réciproque est vraie si E est un ouvert d'un evn.

Exemple 29 Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, E son épigraphe alors E est connexe par arcs.

C-ex 30: Soit Γ le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par:

$$\Gamma = \left[\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} (x, x \times \mathbb{R}^+) \right] \cup \left[\bigcup_{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} (x, x \times]-\infty, 0[) \right]$$

Γ est connexe mais pas connexe par arcs.

2) Application au groupe matriciel.

Prop 31 D'après le thm 28, les ouverts connexes de $M_n(\mathbb{K})$ sont connexes par arcs

Prop 32 $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe

Prop 33 $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe donc connexe par arcs

Prop 34 L'ensemble des projecteurs de rang p de $M_n(\mathbb{C})$ est connexe

Thm 35 Soit $\exp: A \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \in GL_n(\mathbb{C})$

[DVP]

Alors $\exp(M_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$

3) Connexité par lignes brisées.

Dans ce paragraphe E sera un evn

Déf 36 On appelle ligne brisée de E joignant deux points a et b de E tout ensemble de la forme

$$\bigcup_{i=1}^n [x_i, x_{i+1}] \text{ où } n \in \mathbb{N}^*, x_0 = a \text{ et } x_n = b \text{ et } \forall i, x_i \in E$$

Déf 37 Une partie A de E est dite connexe par lignes brisées si pour tout $(a, b) \in A^2$, il existe une ligne brisée incluse dans A joignant a et b .

Prop 38 A convexe $\Rightarrow A$ connexe par lignes brisées

A connexe par lignes brisées $\Rightarrow A$ connexe par arcs

A connexe par arcs $\Rightarrow A$ connexe.

Thm 39 Une partie ouverte Ω de E est connexe si et seulement si elle est connexe par lignes brisées

C-ex En dimension 2: $C(0, 1)$ est connexe par arcs mais pas par ligne brisée

III) Applications

1) Analyse réelle

Thm 40 (Darboux) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Alors $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Thm 41 Soient E et F deux espaces normés (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), U un ouvert de E et $f: U \rightarrow F$ une application différentiable en tout point de U . Soient $[a, b] \subset U$, $k > 0$. Si $\forall x \in [a, b]$, $\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq k$ alors on a l'égalité de la moyenne

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq k \|b - a\|_E$$

Corollaire 42 Si U est un ouvert connexe de E et si $Df(x) = 0$ pour tout $x \in U$ alors f

Prop 43 Soient E et F deux ensembles. Soit h un homéomorphisme. h échange les composantes connexes de E et F . i.e. d. :
 $h(C(x)) = C(h(x)) \quad \forall x \in E$

C-ex 44 $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Appli 45 Le groupe $O_2(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes homéomorphes à $SO_2(\mathbb{R})$

2) Analyse complexe

Déf 46 Un domaine est un ouvert non vide connexe du plan complexe

Thm 47 Soit γ un chemin fermé et Ω le complémentaire de $\text{Im}(\gamma)$. Soit $\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} \quad (z \in \Omega)$

La fonction Ind_γ est une fonction à valeurs entières sur Ω constante sur chaque composante connexe de Ω nulle sur la composante connexe non bornée de Ω .

Thm 48 Soit Ω un ouvert convexe, $p \in \Omega$, f continue sur Ω et $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$. On a pour tout chemin fermé γ dans Ω $\int_\gamma f(z) dz = 0$.

Thm 49 Soit γ un chemin fermé dans un ouvert convexe Ω et soit $f \in H(\Omega)$. Si $z \in \Omega$ et $z \notin \text{Im} \gamma$, on a :
 $f(z) \text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

Thm 50 Soit Ω un domaine, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. $\mathcal{Z}(f) = \{z \in \Omega, f(z) = 0\}$

Alors soit $f \equiv 0$ soit $\mathcal{Z}(f)$ n'a pas de point d'accumulation et $\mathcal{Z}(f)$ est au plus dénombrable

Coro 51 Si f et g sont des fonctions holomorphes sur un domaine Ω tq $\{z \in \Omega, f(z) = g(z)\}$ a un point d'accumulation alors $f = g$.

Thm 52 Soit U un ouvert connexe et borné dans $\mathbb{C}$. Soit f une fonction continue sur $\bar{U}$ vérifiant la propriété de la moyenne $(f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} f(a + re^{it}) dt)$ sur U .

Soit $M = \max_{\partial U} |f|$. Alors 1) $\forall z \in U, |f(z)| \leq M$
 2) $\exists z_0 \in U, |f(z_0)| = M \Rightarrow f = \text{cte}$

Thm 53 (de l'image ouverte)

Soit Ω un domaine, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ alors soit $f(\Omega)$ est un domaine soit c'est un point

3) Théorie des groupes

Thm 54 Si G/H et H sont connexes alors G est connexe

Thm 55 Le groupe $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe

Coro 56 Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes homéomorphes

Coro 57 Les groupes $SL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{C})$ sont connexes.

Thm 58 Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe; le groupe $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes homéomorphes.

Appli 59 $SO_3(\mathbb{R})$ est simple [DVP] [FCN AP3] p 67

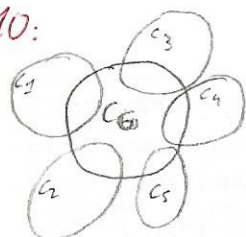
p 62 [Ad] p 242
 p 67 [Ad] p 242
 p 247
 p 250
 p 250
 p 251

p 252
 [Ad] p 72
 [Ad] p 51 [HT] p 34
 p 34
 p 34

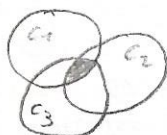
Ammexe:

Prop 10:

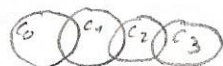
$i_0 = 6$



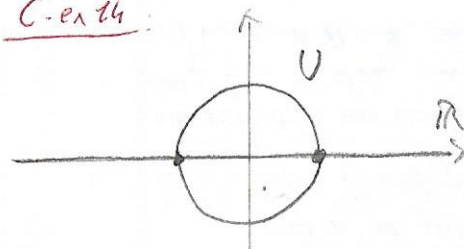
Rq 12



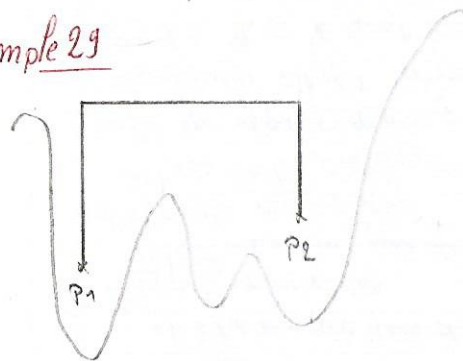
Prop 13



C-ex 14



Exemple 29



Réf: Par ordre d'apparition:

[GOU]: Gourdon Analyse

[QUE]: Queffelec; Topologie

[MAU]: Mauchecorne, Les contre-exemples en maths

[M-T]: Mneimné Testard: Groupes de Lie classiques

[MIM]: Maxime Zavidovique, Un max de Maths

[ROU]: Rouvière, Petit guide de calcul différentiel

[AUD]: Audin: Géométrie

[RUD]: Rudin: Analyse réelle et complexe.

[OAJ]: Objectif Agrégation