205 — Espaces complets. Exemples et applications

Cadre (M, d) un espace métrique. $d_0(x,y) := |x-y|$
d' une autre distance sur M. $L \subset M$.

I. ESPACES COMPLETS

1. Suites de Cauchy, espaces complets [ALB] p88-89

Def 1 On dit qu'une suite $(u_n) \in M^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq N \ d(u_n, u_m) < \varepsilon$.

Prop 2 Toute suite convergente dans M est une suite de Cauchy.

Ex 3. $u_n = \frac{1}{n}$ est une suite de Cauchy de $(]0,1], d_0)$ [HAU] p313

C-ex 4 $\sqrt{2}$ est une limite de rationnels (q_n). (q_n) est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

Def 5 M est complet si toute suite de Cauchy de M converge dans M.

Def 6 Un espace normé complet est un espace de Banach.

Def 7 Un espace préhilbertien complet est un espace de Hilbert.

Ex 8 $(\mathbb{R}, d_0)$ est complet.

C-ex 9 L'ex 3 montre que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.

Prop 10 Soient N un espace métrique et $f : M \to N$ uniformément continue. Si (u_n) est une suite de Cauchy de M, alors $f(u_n)$ suite de Cauchy de N.) s'en sert-on ?

Def 11. Soit $Id' : (M, d') \to (M, d)$ et $Id : (M,d) \to (M, d')$ les applications identité.
d et d' sont équivalentes au sens uniforme si Id et Id' sont uniformément continues.

Coro 12 Si d et d' sont équivalentes au sens uniforme sur M alors (M, d) est complet $\Leftrightarrow$ (M, d') est complet.

Rq 13 La complétude n'est pas une notion topologique.
Soit $d_1(x,y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$.
$(]0,1], d_0)$ n'est pas complet (ex 3) mais $(]0,1], d_1)$ est complet. [HAU] p313.

Prop 14 Si une suite de Cauchy de M admet une valeur d'adhérence dans M alors elle converge vers cette valeur.

Coro 15 Tout espace métrique compact est complet.

C-ex 16 La réciproque est fausse : $(\mathbb{R}, d_0)$

2. Propriétés des espaces complets

Prop 17. Si L est un sous-espace métrique complet de M, alors L est fermé dans M. [ALB] p89

Prop 18. Si M complet et si L est fermé dans M alors L est complet. [ALB] p89

Prop 19 Si $M_1, \dots, M_n$ sont des espaces complets, alors l'espace métrique produit $M_1 \times \dots \times M_n$ muni de la distance produit est complet. [ALB] p90

Ex 20. $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}$ sont complets.

Prop 21 Tout espace normé de dim finie est un espace de Banach. [ALB] p90.

Prop 22 Sont équivalents : [QUEF] p156
1) (M, d) est complet
2) (Fermés-Emboîtés) Toute suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0 a une intersection non vide (donc réduite à un point)

Appl 23 Soit (F, d_1) un espace métrique. On suppose que (M,d) est complet. $f : M \to F$ continue et (E_n) une suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0. Alors
$$f(\cap E_n) = \cap f(E_n)$$ [GOU] p25

Prop 24 Un espace est de Banach si et seulement si toute série $\sum u_n$ absolument convergente est convergente. [GOU] p52

Soit E un espace de Banach, $(H, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert

II. EXEMPLES D'ESPACES COMPLETS

1. Espaces de fonctions [ALB] p90

Prop 25. L'ensemble des fonctions bornées de Ω dans E muni de la norme de la CVU est un espace de Banach.

Coro 26 • L'ensemble des fonctions continues bornées de Ω dans E muni de la même norme est un espace de Banach

• Si K est un espace métrique compact, $\mathcal{C}(K,E)$ est un espace de Banach.

2. Applications linéaires continues

[ALB] p91

Prop 27 Soit F un evn. Alors $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un espace de Banach.

App 28 Si F est un evn, son dual topologique F' est un espace de Banach

[GOU] p49

Prop 29. Si $u \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $|||u||| < 1$. Alors $Id - u$ est inversible et son inverse est $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \in \mathcal{L}_c(E)$.

App 30 $\mathcal{GL}_c(E)$ l'ensemble des endomorphismes inversibles continus (donc d'inverse continu) est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E)$

3. Espaces L^p. [BRE] p54-57)

On identifiera 2 fonctions qui coïncident presque partout.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Def 31 $p \in \mathbb{R}$ $1 \leq p < \infty$.

$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable tq $\|f\|_p < \infty\}$

$L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable tq $\exists C \,/\, |f(x)| \leq C$ pp$\}$

Prop 32 Inégalité de Hölder

$1 \leq p \leq \infty$, et p' tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$.

Alors $fg \in L^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

Prop 33 Inégalité de Minkowski :

$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. $1 \leq p \leq \infty$

Thm 34 Riesz - Fischer.

L^p est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$

4. Espaces de Hilbert [OA]

Ex 35 $(\ell^2(\mathbb{N}), \langle . , . \rangle)$ est un espace de Hilbert. p91

où $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \bar{y}_n$

Ex 36 On étend la def 31 à $(X, \mathcal{T}, \mu)$ espace mesuré.

$(L^2(X), \langle , \rangle)$ est un espace de Hilbert p92

où $\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \bar{g}(x) \, d\mu(x)$.

Thm 37 Projection sur un convexe fermé. p95

C un convexe fermé non vide de H. Pour $x \in H$, $p_C(x)$ est l'unique élément qui réalise la distance de x à C.

On a $\forall y \in C$ $\|x - p_C(x)\| \leq \|x - y\|$

App 38 Thm de représentation de Riesz. p103

Si φ forme linéaire continue sur H, alors $\exists!\, y \in H$ tel que $\varphi(x) = \langle x, y \rangle$ pour tout $x \in H$. De plus $\|\varphi\|_{H'} = \|y\|$

App 39 On peut donc définir l'adjoint d'un endomorphisme continu u de H : il existe une unique application u^* de H dans lui même tq $\forall x, y \in H$ $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$

u^* est linéaire et continue p104

(App 40 : Dualité des L^p). p105

III. THEOREMES IMPORTANTS SUR LA COMPLETUDE

1. Prolongement de fonctions [ALB] p93-95

Thm 41 Thm du prolongement uniformément continu.
A un espace métrique. $f : L \to A$ Si L dense dans M, A complet, f uniformément continue.
Alors il existe un unique prolongement continu $\hat{f} : M \to A$ de f à M. De plus, $\hat{f}$ est UC.

Coro 42 Soit F un evn. G un sev dense dans F.
Alors toute application linéaire continue $u : G \to E$ se prolonge de manière unique en une application linéaire continue $\hat{u} : F \to E$.

App 43 Construction de l'intégrale de Riemann à partir de l'ensemble des fonctions réglées.

2. Théorème de point fixe

Thm 44 Thm du point fixe. [ALB] p97
Si M est complet, alors toute application strictement contractante admet un unique point fixe dans M.

C-ex 45 [GOU] p35
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x + \frac{1}{1+x} & \text{sinon} \end{cases}$ est continue, sans point fixe. (juste contractante)

App 46 Thm de Cauchy-Lipschitz [ALB] p100.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ une application continue localement lipschitzienne par rapport à la 2^{nde} variable.
Alors $\forall (t_0, x_0) \in U^2$ $\exists I$ intervalle contenant t_0 et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\begin{cases} \forall t \in I \quad f'(t) = \varphi(t, f(t)) \\ f(t_0) = x_0 \end{cases}$

App 47 : Thm d'inversion locale [ROU] p222
App 48 : Thm des fonctions implicites [ROU] p259

3. Théorème de Baire et applications [GOU] p397-405

Thm 49 Lemme de Baire
Si M est complet, alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E.

Coro 50 si (F_n) est une suite de fermés de M telle que $\cup F_n = E$. Alors $\cup \mathring{F}_n$ est dense dans M.

App 51 Un evn à base dénombrable n'est pas complet.

$\boxed{\text{App 52 Les fonctions continues nulle part dérivables sont denses dans l'ensemble des fonctions continues}}$

App 53 Thm de Banach Steinhaus :
Si F evn. $H \subset \mathcal{L}_c(E, F)$. $f \in H$.
Soit $\{|||f||| \ / \ f \in H\}$ est borné.
Soit $\exists x \in E$ tq $\sup_{f \in H} \|f(x)\| = +\infty$.

App 54 Il existe des fonctions continues différentes de leur série de Fourier.

[ALB] Albert Topologie
[HAU] Hauchecorne
[GOU] Gourdon Analyse
[QUEF] Queffélec, Topologie
[BRE] Brézis.
[OA] Objectif agrégation