214

THÉORÈME D'INVERSION LOCALE, THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES. EX ET APPLICATIONS.

Cadre : $n, p \in \mathbb{N}$. $U$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, $V$ ouvert de $\mathbb{R}^p$. $a \in U$, $f$ application $U \to \mathbb{R}^p$. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

**Def 1** $f$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de $U$ sur $V$ si $f$ est bijective, de classe $\mathcal{C}^k$ sur $U$ et si l'application réciproque $f^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $V$. [ROU] p94

# I. THÉORÈME D'INVERSION LOCALE

## 1. Énoncés [ROU]

**Thm 2** Théorème d'inversion locale (TIL) p188
Pour $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. $f : U \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^k$. On suppose $Df(a)$ inversible i.e. $\det Df(a) \neq 0$. Il existe alors un ouvert $V$ contenant $a$ et $V \subset U$, un ouvert $W$ contenant $b = f(a)$ tels que $f_{|V}$ $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de $V$ sur $W = f(V)$.
On a l'équivalence : cf ANNEXE
$(x \in V$ et $y = f(x)) \Leftrightarrow (y \in W$ et $x = f^{-1}(y))$
On a de plus $D(f^{-1})(y) = Df(x)^{-1}$ pour $x \in V$.

**Ex 3** $f : (x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. p204
$f : x \mapsto \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{\pi}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ Il n'existe aucun voisinage de 0 sur lequel $f$ soit injective : le TIL ne s'applique pas aussi. p206

**Thm 4** Théorème d'inversion globale (TIG) p190
$f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si $f$ injective sur $U$ et $\forall x \in U$, $Df(x)$ inversible. Alors $f(U)$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $U$ sur $f(U)$.

**Ex 5** • l'ex 3 n'est pas un difféomorphisme global.
• $f : \mathbb{R}_+^* \times ]0, 2\pi[ \to \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $f$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur son image. p71

**Thm 6** TIG : version holomorphe p191
Si $U$ ouvert convexe de $\mathbb{C}$ et $f : U_0 \to \mathbb{C}$ holomorphe, injective sur $U_0$. Alors $f(U)$ ouvert de $\mathbb{C}$ et $f$ est un difféomorphisme holomorphe de $U$ sur $f(U)$ ie $f^{-1}$ est holomorphe sur $f(U)$.

## 2. Applications

▶ **Thm 7** (Hadamard-Lévy). $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$. Sont équivalents :
i) $f$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$
ii) l'image réciproque par $f$ de tout compact est compacte, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $Df(x)$ est inversible. [ROU] p191 DVT

Cas particulier $k > 0$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $\|f(x) - f(y)\| \geq k\|x - y\|$. Alors $f$ est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. [ROU] p221.

▶ Algèbre linéaire
• soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A$ est "suffisamment" proche de l'identité alors $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ / $B^k = A$. [OA] p11
• **Thm 8**. $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$ est $\mathcal{C}^1$ et sa différentielle en 0 est l'identité. Elle réalise donc un difféomorphisme entre un voisinage de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et un voisinage de $Id$ dans $GL_n(\mathbb{K})$. [MT] p59
**App 9** $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective [MAX] p DVT
**App 10** $GL_n(\mathbb{K})$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits. [MT] p59

▶ **Prop 11** (Submersion). Si $f$ $\mathcal{C}^1$, $a \in U$ tq $Df(a)$ surjective de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^p$ alors il existe un voisinage ouvert $V$ de $a$ un ouvert $W$ de $\mathbb{R}^n$, un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi$ de $W$ sur son image tq $\varphi(W) \subset U$ et $f(\varphi(x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_p)$ (ie $n \geq p$)
**Rq** l'application $f : U \to \mathbb{R}^p$ $\mathcal{C}^1$ est une submersion sur $U$ si sa jacobienne est surjective en tout point.

[ROU] p230 ou [LAF] p25 ou [OA] p14

**Prop 12** (Immersion) Si $f$ $\mathcal{C}^1$ $a \in U$ tq $Df(a)$ injective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ alors il existe un voisinage $V$ de $a$, un ouvert $U' \subset U$ tq $f(U') \subset V$ et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi$ de $V$ sur son image tels que $\varphi(f(x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ (ie $n \leq p$)
**Rq** l'application $f : U \to \mathbb{R}^p$ $\mathcal{C}^1$ est une immersion sur $U$ si sa jacobienne est injective en tout point. cf ANNEXE

Thm du rang constant ?

[ROU] p209 ▶ **Lem 13** Si $A_0 \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$ alors il existe un voisinage $V$ de $A_0$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\rho \in \mathcal{C}^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ tq : $\forall A \in V \quad A = {}^t\rho(A)\, A_0\, \rho(A)$

[ROU] p354 **Thm 14** Lemme de Morse. Si $p = 1$, $f$ $\mathcal{C}^3$ et $O \in U$.
DVT Si $Df(0) = 0$, $D^2 f(0)$ non dégénérée et $\mathrm{sign}(D^2 f(0)) = (p, n-p)$
Alors il existe un $\mathcal{C}^1$ difféo $\varphi$ entre 2 voisinage de $0$ tq $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 \dots - u_n^2$
où $u = \varphi(x)$.

[OA] p15 **App 15** Si $p = 1$, $f$ $\mathcal{C}^3$ $O \in U$, $Df(0) = 0$, $D^2 f(0)$ définie positive alors $0$ est un minimum local strict de $f$.

[ROU] p331 **App 16** $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$ a un point double à l'origine

DVT ▶ **Thm 17** Thm du point fixe de Brouwer [ROU] p175
On note $B$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$. Toute application continue de $B$ dans $B$ admet (au moins) un point fixe.

## II. THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES

/!\ chgmt de notations...

### 1. Enoncés [ROU]

p196 TFI **Thm 18** $U$ ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. $(a, b) \in U$. $f : U \to \mathbb{R}^p$ $\mathcal{C}^k$
Si $f(a, b) = 0$ et $D_y f(a, b)$ (formée des dérivées partielles par rapport à $y$) est inversible.
Alors $\exists V \in \mathcal{V}(a)$, $W \in \mathcal{V}(b)$ avec $V \times W \subset U$ et $\forall (x, y) \in V \times W$ $D_y f(x, y)$ inversible, $\exists !\, \varphi : V \to W$ tq cf ANNEXE
$(x \in V, y \in W$ et $f(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V$ et $y = \varphi(x))$.
De plus $\varphi$ est $\mathcal{C}^k$ sur $V$.

p193 **Ex 19** Pour l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$, on a deux fonctions implicites $\varphi_1$ et $\varphi_2$ :
$(a,b) = (0, 1)$ $V_1 = ]-1, 1[$, $W_1 = ]0, \infty[$ $\quad y = \varphi_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$
$(a,b) = (0, -1)$ $V_2 = ]-1, 1[$. $W_2 = ]-\infty, 0[$ $\quad y = \varphi_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$

p194 **Coro 20** On obtient $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x, \varphi(x)) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial y_k}(x, \varphi(x)) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(x)$

p194 **Ex 21** pour l'ex 19, on a $\varphi'(x) = -x/y$

**Rq** le TIF et le TFI sont équivalents. p196

### 2. Applications

▶ **Thm 22** Extremas liés [GOU] p317
$f, g_1, \dots, g_r : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$. $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$
Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si $Dg_1(a), \dots, Dg_r(a)$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ (multiplicateurs de Lagrange) tq
$$Df(a) = \lambda_1 Dg_1(a) + \dots + \lambda_r Dg_r(a).$$

**App 23** Inégalité arithmético-géométrique [GOU] p320
$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \quad \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

**App 24** diagonalisation des endomorphismes symétriques [OA] p21

**App 25** Inégalité de Hadamard, si $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$
$|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \dots \|v_n\|$ [ROU] p410

▶ **App 26** Une racine d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dépend localement de $P$ de manière $\mathcal{C}^\infty$. [OA] p11

**App 27** L'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés simples est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$. [OA] p12

## III. MISE EN SITUATION : LES SOUS-VARIÉTÉS

Dans toute la suite, on se place dans $\mathbb{R}^n$ et on prend $V$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. $a \in V$.

### 1. Définitions et théorème central [ROU]

**Def 28** $d \in \mathbb{N}$, On dit que $V$ est une sous-variété de dimension $d$ si $\forall a \in V$, $\exists$ $F : U \to F(U)$ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme (où $U \in \mathcal{V}(a)$) qui transforme $V$ en un sev de dimension $d$ ie $F(V \cap U) = V' \cap F(U)$ avec $V' = \mathbb{R}^d \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ p197

**Ex 29** Si on appelle $C$ le cône d'équation $x^2 + y^2 = z^2$.
$C \setminus \{0\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. p198

cf Annexe

p269 **C-ex 30**: Le sous ensemble $y=|x|$ de $\mathbb{R}^2$ n'est pas une sous-variété.

p200 **Thm 31** Thm des sous-variétés. $d\in\mathbb{N}$. Sont équivalents

i) $V$ est une sous-variété de dimension $d$

ii) (définition implicite) $\forall a\in V\ \exists U\in\mathcal{V}(a)$ et $n-d$ fonctions $f_i : U\to\mathbb{R}$ $C^1$ tq $(x\in V\cap U)\Leftrightarrow(x\in U$ et $f_1(x_1,\dots,x_n)=\dots=f_{n-d}(x_1,\dots,x_n)=0)$ et $Df_1(a),\dots,Df_{n-d}(a)$ sont indépendantes.

iii) (Graphe) $\forall a\in V\ \exists U\in\mathcal{V}(a)$, $U'\in\mathcal{V}(a_1,\dots,a_d)$ et $n-d$ fonctions $g_i : U'\to\mathbb{R}$ $C^1$ tq $(x\in V\cap U)\Leftrightarrow\begin{cases}(x_1,\dots,x_d)\in U' \text{ et}\\ x_{d+1}=g_1(x_1,\dots,x_d),\dots x_n=g_{n-d}(x_1,\dots,x_d)\end{cases}$

iv) (déf paramétrique) $\exists U\in\mathcal{V}(a)$ $\Omega\in\mathcal{V}_{\mathbb{R}^d}(0)$ et $n$ fonctions $\varphi_i:\Omega\to\mathbb{R}$ $C^1$ tq $\varphi: u=(u_1,\dots,u_d)\mapsto(\varphi_1(u),\dots,\varphi_n(u))$ soit un homéomorphisme de $\Omega$ sur $V\cap U$ avec $a=\varphi(0)$ et $D\varphi(0)$ injective (donc de rang $d$).

p201 **Rq** • Le TFI donne ii) $\Rightarrow$ iii).
• Le TIL donne iv) $\Rightarrow$ (iii).

p199 **Ex 32** Par ii) on obtient que $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2=1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

## 2. Espaces tangents [ROU]

p198 **Def 33** Un vecteur $v\in\mathbb{R}^n$ est dit tangent en $a\in V$ s'il existe une fonction dérivable $\gamma: I\to\mathbb{R}^n$ ($0\in I$ ouvert) tq $\varphi(I)\subset V$, $\gamma(0)=a$ et $\gamma'(0)=v$.

p199 **Thm 34** Si $V$ est une sous-variété de dim $d$, alors $\forall a\in V$ {vecteurs tangents en $a$} est un sev de dim $d$ appelé ev tangent en $a$ à $V$.

p201 **Prop 35** En reprenant les notations du thm 31, l'ev tangent en $a$ à $V$ est

ii) $\mathrm{Ker}(Df(a))$ iii) $\mathrm{Gr}\ Dg(a_1,\dots,a_d)$

iv) $\mathrm{Im}(D\varphi(a))$

**App 36** Le thm des extrema liés assure que l'espace tangent en $a$ (l'extremum relatif) à la sous-variété $\Gamma$ est $\{h\in\mathbb{R}^n / Dg_1(a).h=0,\dots Dg_r(a).h=0\}$. On a plus simplement que $Df(a)=0$ sur le plan tangent à $\Gamma$ en $a$. [OA] p20

## 3. Exemples de sous-variétés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [ROU] p284

**Prop 37** $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension $n^2-1$.
↳ L'espace vectoriel tangent en un point $X\in SL_n(\mathbb{R})$ est $\{H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ \mathrm{tr}(X^{-1}H)=0\}$.

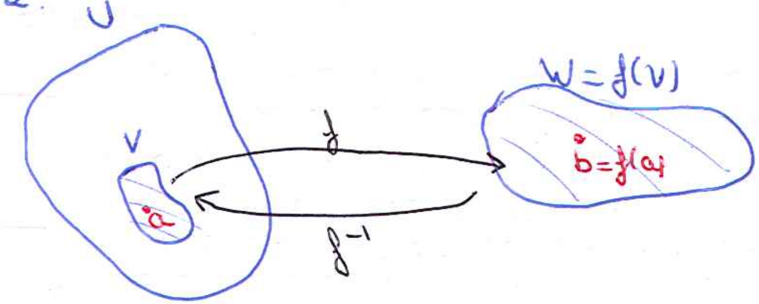
**Prop 38** $O_n(\mathbb{R})$ est une sous variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.
↳ L'espace vectoriel tangent en un point $X\in O_n(\mathbb{R})$ est $\{H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ {}^t(X^{-1}H)=-X^{-1}H\}$

Si on veut $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété. [MT] p68 (très moche) ou $H_2G_2$ p270

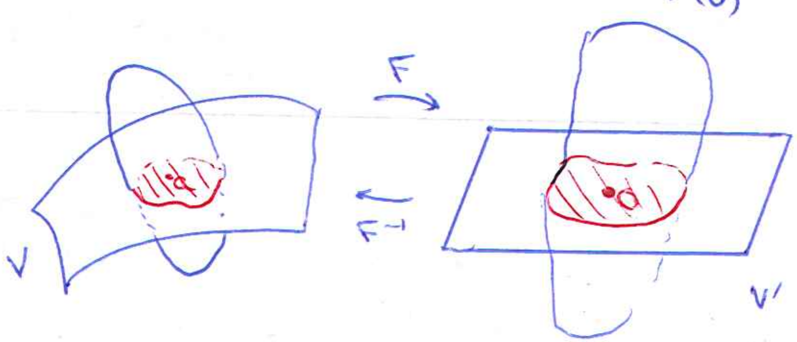

[ROU] Rouvière, PGCD
[OA] objectif agrégation
[MT] Mneimné - Testard, Groupes de Lie Classiques
[LAF] Lafontaine Introduction aux variétés différentielles
[MAX] Max de Math, Taxidorique
[GOU] Gourdon Analyse

# Annexe

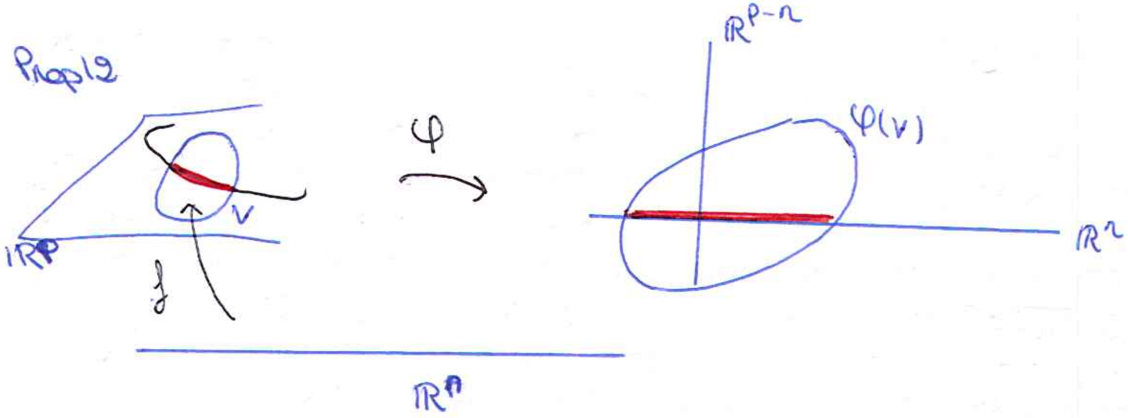
Thm 2.




Def 28




Prop 12




Thm 18