228

Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples

Cadre : I désigne un intervalle réel d'extrémités $a<b$ dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty ; -\infty\}$

I) Introduction aux notions de continuité et dérivabilité

1) Fonctions continues [ROM] p37

Définition 1 On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue au point $\alpha \in I$ si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$

Définition 2 : On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I si elle est continue en tout point de I

Contre-exemple 3 : La fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$

Exemple 4 : Une fonction constante est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Prop 5 Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $\alpha \in I$ ssi pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers α la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(\alpha)$

Contre-exemple 6 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0)=0$ et $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$. f n'est pas continue en 0

Thm 7 Si α est un réel adhérent à I n'appartenant pas à I et si la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ a une limite ℓ en α, il existe alors un unique prolongement de f à $I \cup \{\alpha\}$ qui est continu en α, ce prolongement est défini par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in I$ et $\tilde{f}(\alpha) = \ell$.

Exemple 8 : La fonction $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0)=0$

Proposition 9 Soient f, g deux fonctions définies sur I, à valeurs réelles et continues en $\alpha \in I$. Alors :

- $|f|$, $f+g$, fg, $\min(f,g)$, $\max(f,g)$ sont continues en α
- si $f(\alpha) \neq 0$, la fonction $\frac{1}{f}$ définie sur un voisinage de α est continue en α
- si $f : I \to \mathbb{R}$ continue en α, $f(I) \subset J$ avec $g : J \to \mathbb{R}$ continue en $\beta = f(\alpha)$ alors $g \circ f$ est continue en α

Définition 10 : On dit que f est uniformément continue si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (x,y) \in A^2, \|x-y\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$ p47

Rq 11 : f uniformément continue $\Rightarrow$ f continue.

C-ex 12 : $f : x \mapsto x^2$ est continue mais pas uniformément continue.

Thm 13 Si K est un compact de E, alors toute fct f continue de K dans F est uniformément continue sur K.

Thm 14 Weierstrass Toute fonction continue $f : [a;b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynômes. [DVP] [GOU] p224

2) Fonctions dérivables [ROM] p77

Définition 15 On dit que la fonction f, définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est dérivable en $a \in I$ si la fonction $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ définie sur $I \setminus \{a\}$ admet une limite finie en a. On note alors $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \tau_a(x)$

Thm 16 Si f est dérivable en $a \in I$ elle est alors continue en ce point

C-ex 17 : - $|x| = f(x)$ n'est pas dérivable en 0.

- $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n f(4^n x)$, f n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$

Prop 18 Soient f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$.

p82-83

1) Pour tout réels λ, μ, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a avec $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.
2) La fonction fg est dérivable en a avec : $(fg)'(a) = f'(a) g(a) + f(a) g'(a)$ (Formule de Leibniz)
3) Si $f(a) \neq 0$ alors f ne s'annule pas dans un voisinage de a, la fonction $\frac{1}{f}$ définie dans un tel voisinage est dérivable en a avec : $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = \frac{-f'(a)}{f^2(a)}$
4) Soient I, J deux intervalles réels, $f : I \to J$ une fonction dérivable en $a \in I$, $g : J \to \mathbb{R}$ dérivable en $b = f(a)$, la fonction $g \circ f$ est définie sur I et dérivable en a avec $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a)$

Prop 19 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone dérivable en a. La fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si, et seulement si, $f'(a) \neq 0$ et dans ce cas on a :
$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$
p84

Ex 20: $\forall x \in]-1;1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Déf 21 On dit qu'une fonction f, définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est de classe C^1 sur I si elle est dérivable en tout point de I et si la fonction dérivée f' est continue sur cet intervalle. p81

Déf 22 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit qu'une fonction f, définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est classe C^n sur I si elle est n fois dérivable sur I avec $f^{(n)}$ continue sur cet intervalle

C-ex 23: $x^2 \sin\frac{1}{x}$ est dérivable mais pas C^1

Déf 24 On dit qu'une fonction f, définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est de classe C^∞ sur I, si elle est n fois dérivable sur cet intervalle pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exemple 25: fonctions polynômiales

Thm 26 (Leibniz) Soient f, g deux fonctions n fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$. La fonction fg est n fois dérivable sur I avec :
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Thm 27. Soit $F : [a;b[\to \mathbb{R}$ une application continue, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $l = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} F'(x)$
Alors F est dérivable en a et $F'(a) = l$

II) Résultats fondamentaux

1) Théorème des valeurs intermédiaires [ROM] p56

Thm 28: Si I est un intervalle réel et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$, alors $f(I)$ est un intervalle

Thm 29 (des valeurs intermédiaires): Si $I = [a;b]$ avec $a<b$ et f est une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $x \in]a;b[$.

C-ex 30: f définie sur $I = [0;2]$, $f(x) = 1$ si $0 \leq x \leq 1$,
$f(x) = 2$ si $1 < x \leq 2$ f continue sur $I \setminus \{1\}$ mais
$f(I) = \{1, 2\}$

Thm 31 (Darboux) Si f est une fonction à valeurs réelles définie et dérivable sur un intervalle I, alors sa fonction dérivée f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires p88

C-ex 32: $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ vérifie le TVI mais n'est pas C^1.

2) Théorème de Rolle et conséquences [ROM] p137

Thm 33: Soient I un intervalle réel d'intérieur non vide, f une fonction à valeurs réelles définie sur I dérivable en un point a intérieur à I. Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$ p87

Thm 34 (Rolle) Si f est une fonction à valeurs réelles définies sur un intervalle compact $[a,b]$ non réduit à 1 point, continue sur cet intervalle et dérivable sur $]a;b[$ avec $f(a) = f(b)$, alors il existe un point $c \in]a;b[$ tq $f'(c) = 0$

Ex 35: $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1;1]$ n'est pas dérivable au bord il n'y a pas unicité du point c tel que $f'(c) = 0$

Application 36 Si P est un polynôme réel de degré $n \geq 2$ scindé sur $\mathbb{R}$ alors il en est de même de son polynôme dérivé.

Thm 37 (Accroissements finis) Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle compact $[a,b]$ non réduit à un point, continue sur cet intervalle et dérivable sur $]a;b[$, alors il existe $c \in]a;b[$ tq $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ p 151

Appli 38 Si f est une fonction à valeurs réelles dérivable sur un intervalle réel I, alors f est croissante sur I ssi $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$ p 154

C-Ex 39 : $f : x \longmapsto -\frac{1}{x}$, $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$ mais f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}^*$

3) Formule de Taylor [ROM] p 181, 182, 186

Thm 40 (Taylor-Lagrange). Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle compact $[a;b]$ non réduit à un point, de classe C^n sur cet intervalle et $n+1$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$ alors il existe un point $c \in]a;b[$ tq :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Thm 41 (Taylor avec reste intégral) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fct à valeurs réelles définie et de classe C^{n+1} sur un intervalle compact $[a,b]$ non réduit à un point, alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n\,dt$$

Thm 42 (Taylor-Young) Soient f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I, a un point intérieur à I. Si f est dérivable à l'ordre $n \geq 1$ en a, elle admet alors, au voisinage de a, le développement limité d'ordre n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Application 43 : Calcul de développement limité.

III) Etude de certaines classes de fonctions

1) Cas des fonctions monotones [ROM] p44

Thm 44 : Si f est une fonction monotone de I dans $\mathbb{R}$, alors l'ensemble de ses points de discontinuité est au plus dénombrable

Prop 45 : Si f' est monotone alors f est continue

- Une fonction monotone est pp. dérivable

2) Fonctions convexes [GOU] p94

Déf 46 Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si,
$\forall (a,b) \in I^2, \forall \lambda \in [0;1]$, $f((1-\lambda)a+\lambda b) \leq (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b)$

Prop 47 Une fct convexe $f : I \to \mathbb{R}$ possède en tout point de $\mathring{I}$ une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Elle est donc continue sur $\mathring{I}$. De plus, les applications f'_g et f'_d sont croissantes sur $\mathring{I}$ et $f'_g(x) \leq f'_d(x)$ $\forall x \in \mathring{I}$

Thm 48. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est convexe
ii) f' est croissante
iii) La courbe représentative de f est au dessus de ses tangentes

Corollaire 49 : Une application $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable est convexe ssi $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in I$

Appli 50 Soient $(x_1, \dots, x_n)$ des nombres réels positifs. On a
$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

3) Cas des fonctions lipschitziennes [ROM] p48

Déf 51 : Une fonction est dite lipschitzienne s'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $|f(x)-f(y)| \leq \lambda |x-y|$ $\forall x \in I$.

Prop 52 f lipschitzienne $\Rightarrow$ f uniformément continue.

Corollaire 53 : Si f est une fonction à valeurs réelles et dérivable sur un intervalle réel I avec f' bornée, elle est uniformément continue.

4) Suites de fonctions [GOU] p228

Thm 53 Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge uniformément sur I vers $f : I \to \mathbb{R}$ et si toutes les fonctions f_n sont continues en $x_0 \in I$, alors f est continue en x_0.

C-ex 54 : $f_n(x) = x^n$ sur $[0;1]$ converge simplement vers $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ [HAU] p231

Application 55 Toute fonction continue de $C^0([0;1])$ est limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur $[0;1]$ nulle part dérivable DVP [Z-Q] p270

5) Intégrale dépendant d'un paramètre

[GOU] p157

Thm 56 Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et

$$f : J \times I \to \mathbb{R}, \quad (x,t) \mapsto f(x,t)$$

vérifiant les propriétés suivantes

i) Pour tout $x \in J$, l'application $f(x,\cdot) : t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.

ii) $\forall t \in I$, l'application $f(\cdot,t) : x \mapsto f(x,t)$ est continue sur J.

iii) il existe une fonction positive φ, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que $\|f(x,t)\| \leq \varphi(t)$ $\forall x \in J$

Alors l'application

$$\phi : J \to E, \quad x \mapsto \int_a^b f(x,t)\,dt$$

est bien définie, et elle est continue sur A

Thm 57 Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$ une application vérifiant les propriétés suivantes

i) Pour tout $x \in J$, l'application $f(x,\cdot)$ ~~t~~ $\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.

ii) f admet une dérivable partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant les hypothèses du théorème précédent

Alors l'application $\phi : J \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int^b f(x,t)\,dt$ est de classe C^1 sur J et

on a $\forall x \in J \quad \phi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$

Application 58 La fonction gamma :

$$\Gamma :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

C-Ex 59. $f : \mathbb{R} \times [0;+\infty[\to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t) = x^2 e^{-t|x|}$

$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ [HAU] p226

F est définie mais non dérivable

Références

[ROM] : E. Rombaldi : Éléments d'Analyse Réelle pour presque tout

[GOU] : Gourdon Analyse pour Weierstrass + III 4) 5)

[HAU] Hauchecorne : C-Ex en Mathématiques (2 c-ex)