

I. Fonctions monotones1) Définitions et premières propriétés

Def 1 : Soit $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f est dite croissante (resp strict croissante) ssi $\forall (x, y) \in D^2, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (resp $f(x) < f(y)$). f est dite décroissante (resp strict décroissante) ssi $-f$ est croissante (resp strict croissante). f est dite monotone si f est croissante ou décroissante.

Ex 2 : $\frac{1}{x}$ décroissante sur $\mathbb{R}^{++}$ mais pas sur tout $\mathbb{R}$.
La fonction de répartition d'une variable aléatoire est une fonction croissante.
Une limite simple de fonctions monotones est monotone.

Prop 3 : f est monotone et injective ssi elle est strictement monotone.

- Si f croissante et $\lambda \geq 0$, λf croissante.
- Si f et g croissantes, $f+g$ croissante.
- Si f et g croissantes, $f \geq 0$ et $g \geq 0$ alors fg croissante.
- Si f et g croissantes, f/g croissante.

Rmq 4 : L'ensemble des fonctions monotones n'est pas un sev.

Thm 5 : Si f croissante alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si $f(x_0) \geq x_0$ et décroissante si $f(x_0) \leq x_0$ où $x_{n+1} = f(x_n)$. Si I borné alors cette suite est convergente et si de plus f continue, alors sa limite est un point fixe de f .

Thm 6 : Si f décroissante, elle admet au plus un point fixe dans I . Si I borné et f continue alors $(x_{2n})_n$ et $(x_{2n+1})_n$ convergent vers des points fixes de $f \circ f$.

2) Existence de limite et continuité

Thm 7 : Soit D une partie de $\mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ monotone, $a \in \overline{D}$ tq a soit adhérent à $D \cap]a, +\infty[$. Alors f admet une limite à droite au point a .

Coro 8 : Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une application monotone et $a \in I$. Si $a \neq \sup(I)$, f admet une limite à droite (finie) et si $a \neq \inf(I)$, f admet une limite à gauche (finie).

Thm 9 : Soit f une application monotone d'un intervalle réel I dans $\mathbb{R}$. L'ensemble E des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Ex 10 : Il existe des fonctions strictement croissantes dont l'ensemble des points de discontinuité est dense :
 $u_n(x) = \frac{1}{2^n} \mathbb{1}_{\{r_n \leq x\}}$ où r_n est une énumération de $\mathbb{Q} \cap]0, 1[$.
alors $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est strictement croissante et discontinue en tous les points de $\mathbb{Q} \cap]0, 1[$.

Thm 11 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une application monotone. f est continue sur I ssi $f(I)$ est un intervalle.

Coro 12 : Soit I un intervalle et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone alors $J = f(I)$ est un intervalle et f induit un homéomorphisme de I sur J .

Thm 13 : Réciproquement, soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f un homéomorphisme de I sur J alors f est strictement monotone.

Ex 14 : sinus induit un homéomorphisme croissant de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. L'homéomorphisme réciproque est Arcsinus. Il est croissant de $[-1, 1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (*).

3) Monotonie et dérivabilité

Thm 15 : I intervalle de $\mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable à droite sur I .

- 1) f est constante ssi $\forall t \in I, f'_d(t) = 0$
- 2) f est croissante ssi $\forall t \in I, f'_d(t) \geq 0$
- 3) f est décroissante ssi $\forall t \in I, f'_d(t) \leq 0$

Thm 16 (Caractérisation des applications strict monotones) : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur I et dérivable à droite sur I , f est strictement croissante (resp décroissante) sur I ssi $f'_d \geq 0$ (resp $f'_d \leq 0$) et $X = \{t \in I \mid f'_d(t) = 0\}$ soit d'intérieur vide.

Ex 17 : L'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^3$ montre que f peut-être strictement croissante sans que $X = \emptyset$.

[RON]
p35

Thm 18 : [ADN15] : Une fonction monotone est dérivable p.p.

(Rmq: escalier de Cantor, une fonction monotone continue peut être dérivable p.p avec une dérivée nulle p.p sans être constante)

4) Comparaison série-intégrale

[GOU]
p204

Prop 19 : Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, continue par morceaux et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$. En particulier, la série $\sum f_n$ et l'intégrale $\int_0^\infty f(t) dt$ ont même nature. (*)

[GOU]
p203

Appli 20 : Si H_n est la série harmonique ie $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ alors $H_n = \log(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

II - Fonctions convexes

1) Définitions et premières propriétés

[RON]
p233

Def 21 : Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si $\forall (x, y) \in C^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$
 f est dite concave si $-f$ est convexe.

[RON]
p233

Rmq 22 : Lorsque l'inégalité est stricte pour $\lambda \in]0, 1[$ et $x \neq y$ on dit que f est strictement convexe

[RON]
p235

Ex 23 : $x \mapsto |x|$ est convexe
 $x \mapsto e^x$ est convexe

[RON]
p236

Ex 24 : Une limite simple de fonctions convexes est convexe

Rmq 25 : Ce n'est pas vrai pour les fonctions strictement convexes

[RON]
p235

Ex 26 : Une fonction est affine ssi est convexe et concave

[RON]
p233

Thm 27 : L'épigraph de f est la partie de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ définie par $E(f) = \{(x, y) \in C \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$. L'application f est convexe ssi son épigraph est convexe dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ (*)

[RON]
p234

Rmq 28 : Les cordes sont au-dessus de la courbe.

[RON]
p235

Prop 29 : Une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe.

[RON]
p235

Cex 30 : le produit de 2 fonctions convexes n'est pas forcément convexe
 $x \mapsto x^3$. La composée de 2 fonctions convexes n'est pas forcément convexe : f convexe non affine avec $-x$ donne $-f$ qui est concave.

2) Caractérisation des fonctions convexes

→ En dimension 1

[RON]
p237

Thm 31 : Une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue est convexe ssi $\forall (x, y) \in I$
 $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$

[KAU]
p198

Cex 32 : Soit $f(x) = (p(x))^2$ où p est la projection sur $\mathbb{Q}$ parallèlement à $\mathbb{V}$ où $\mathbb{V} \oplus \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ alors f vérifie l'inégalité précédente mais n'est pas convexe

[RON]
p238

Thm 33 : Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, on a équivalence entre : (*)

1) f convexe sur I

2) $\forall x < y < z$, $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$

3) $\forall a \in I$, la fonction $T_a: x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$

[RON]
p240

Thm 34 : Une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est constante ssi elle est convexe et majorée

[RON]
p241

Cex 35 : $f(x) = \frac{1}{1+x}$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$ et majorée par 1 sans être constante.

[RON]
p244

Thm 36 : Soit f une fonction dérivable sur I . On a équivalence entre :

1) f est convexe sur I

2) f' est croissante sur I

3) La courbe représentative de f est située au-dessus de sa tangente en tout point de I

Si f est 2 fois dérivable sur I alors elle est convexe ssi $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$

[RON]
p246

Appli 37 : Processus de Galton-Watson (DEV)

Ex 38 : $\log$ est strictement concave sur $\mathbb{R}^+*$

[RON]
p246

• par $p > 1$, $x \mapsto x^p$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}^+*$ et par $0 < p < 1$, elle est strictement concave

→ En dimension 1

[RON]
p245
+
[OA]
p29

Thm 39 : Soit C ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) f est convexe sur I
- 2) $\forall x, y \in I$, on a $(Df(x) - Df(y)) \cdot (x - y) \geq 0$
- 3) $\forall x, y \in I$, on a $f(x) \geq f(y) + Df(y) \cdot (x - y)$

Si f est 2 fois différentiable, f convexe ssi $\langle \text{Hess}(f)(x), x \rangle \geq 0$

[OA]
p29

Appli 40 : Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, $x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ convexe $\Leftrightarrow A$ positive

3) Régularité en dimension 1

[RON]
p242

Thm 41 : Si f convexe sur I alors elle admet une dérivée à droite et à gauche en tout point de $\overset{\circ}{I}$, les fonctions dérivées à droite et à gauche sont croissantes sur $\overset{\circ}{I}$ et pour $a < b$ dans $\overset{\circ}{I}$, on a $f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_g(b) \leq f'_d(b)$

[RON]
p242

Coro 42 : Une fonction convexe sur I est continue sur $\overset{\circ}{I}$.

[RON]
p243

Cex 43 : Une fonction convexe n'est pas forcément continue sur I : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur }]0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \text{ ou } 1 \end{cases}$

[RON]
p243

Thm 44 : I intervalle réel ouvert non vide et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. f est convexe ssi elle est continue et dérivable à droite sur I de dérivée droite f'_d croissante.

III - Inégalités de convexité et optimisation

1) Inégalités de convexité

[RON]
p252

Thm 45 (inégalité arithmético-géométrique) Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ on a $(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

[RON]
p250

Thm 46 (Hölder) : Soit $p, q > 0$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ où $f \in L^p$ et $g \in L^q$

[RON]
p251

Coro 47 : $f \mapsto \|f\|_p$ définit une norme sur L^p

[RON]
p249

Thm 48 : Si f est convexe alors par toute combinaison linéaire convexe $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, on a $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$ (Jensen)

Prop 49 : Si X est une va définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et si g est convexe alors $g(E[X]) \leq E[g(X)]$ [RON] p249

Appli 50 : $E[X^2] \geq E[X]^2$ donc la variance d'une va est ≥ 0

Thm 51 (Hoeffding) : Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ suite de va réelles, indépendantes, bornées ps et centrées avec $|X_i| \leq c_i$ p-ps. [OUV2] p128

Si $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ et $a_n = \sum_{j=1}^n c_j^2$ alors $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2a_n}\right)$$

(DEV)

Thm 52 : inégalité de Kantorovitch

(DEV)

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|x\|^4 \leq \langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} \right)^2 \|x\|^4$ où λ_1, λ_n sont resp la plus grande et la plus petite valeur propre de A .

2) Optimisation

Thm 53 : Si f convexe sur I est dérivable en $a \in \overset{\circ}{I}$ et si $f'(a) = 0$ alors f admet un minimum global en a .

[RON]
p241

Len 54 : Soient C un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convexe alors x minimum local de f et f différentiable en x ssi $Df(x) = 0$

[OA]
p16

Len 55 : C ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convexe 2 fois différentiable en a avec $Df(a) = 0$ alors a minimum local de f ssi $D^2f(a)$ est positive.

[OA]
p18

Len 56 : C convexe non vide, $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ strict convexe sur C alors il existe au plus un point $\bar{x} \in C$ minimisant f sur C

[OA]
p30

Thm 57 : Si f convexe sur I admet un minimum local alors ce minimum est global

[RON]
p242

Prop 58 : Convexité logarithmique du déterminant dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in]0, 1[$ alors $\det(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \det(A)^\lambda \det(B)^{1-\lambda}$ avec inégalité stricte si $A \neq B$ et $\lambda \in]0, 1[$ (DEV)

[FGN]
alg 3

Appli 59 : John-Löwner

Prop 60 : méthode de Newton (DVP)

Prop 61 : Gradient à pas optimal

[RON]
[H-U]

[RDO3]: Ramis, Deschamps, Odaux, Cours de mathématiques spéciales 3, topologie et éléments d'analyse

[RON]: Rombaldi, éléments d'analyse réelle

[HAU]: Hauchecorne

[GCU]: Gardon, analyse

[OAS]: Objectif agrégation

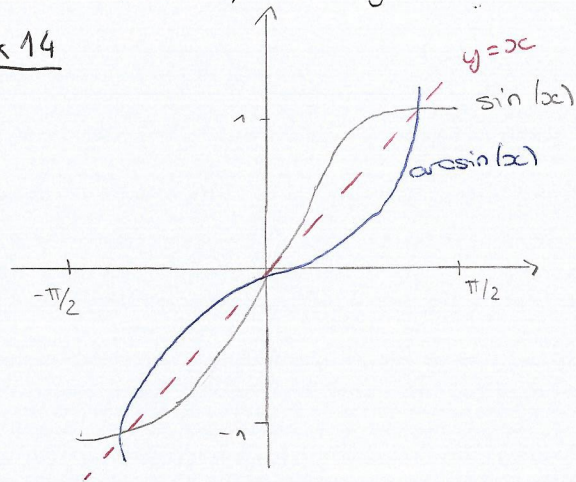
[OUZ2]: Ouvrard, Probabilité 2

[H-V]: Hiriart-Urruty

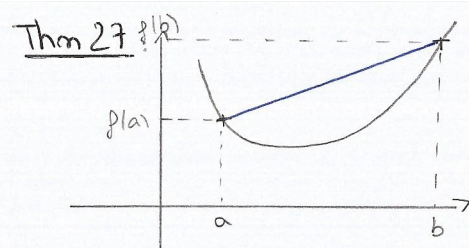
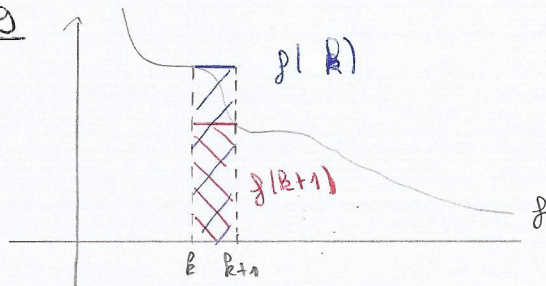
[FONalg3]: Otaux X-ENS alg 3

[ROU]: Rouvière, Petit guide du calcul différentiel

Ex 14



Prop 19



Thm 33

