235 — Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales

I] Limites et intégration

1) Cas des suites de fonctions

[GOU] p 221-224

Def 1 : Soit X un ensemble et E un evn. Pour toute application $f : X \to E$ bornée on introduit $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|$ la norme de convergence uniforme.
On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f si $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Thm 2 : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E, qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors f est continue et
$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

Ex 3 : $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ converge uniformément vers $f : x \mapsto e^{-x}$ donc $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^1 e^{-x}dx = 1 - e^{-1}$

Cor 4 : Si $\sum g_n$ est une série de fonctions continues d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E, qui converge uniformément sur $[a,b]$, alors
$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b g_n(t)\,dt\right).$$

[BP] p 131

Thm 5 : (Beppo-Levy)
Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $\lim_n f_n$ est mesurable et $\int_X \lim_n f_n\, d\mu = \lim_n \int_X f_n\, d\mu$.

p 127

App 6 : $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right) e^{\alpha x} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
$$\lim_n I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-1)x}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}.$$

p 134

Thm 7 : (Lemme de Fatou)
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors $0 \leq \int_X \underline{\lim_n} f_n\, d\mu \leq \underline{\lim_n} \int_X f_n\, d\mu \leq +\infty$

App 8 : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrables convergeant simplement vers f et vérifiant $\sup_n \int_X |f_n|\, d\mu < +\infty$. Alors f est intégrable.

App 9 : Soit f une fonction croissante sur $[0;1]$, continue en 0 et 1 et dérivable pp dans $[0;1]$. Alors $\int_0^1 f'(x)\,dx \leq f(1) - f(0)$.
Pour f définie sur $[0;1]$ par $f = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2};1]}$ on a inégalité stricte : $\int_0^1 f'(x)\,dx = 0 < f(1) - f(0) = 1$.

[B-P] p 132-137

Thm 10 : (Convergence dominée)
Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $L^1(X, \mathbb{C}, \mu)$ telle que :
- $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ μ-pp, pour une fonction f
- $\exists g \in L^1(X, \overline{\mathbb{R}}^+, \mu)$ tq $\forall n$, $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ μ-pp.

Alors $f \in L^1$ et $\lim_n \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu$.

App 11 : Soit f une fonction partout dérivable sur $[0,1]$ de dérivée bornée. Alors $\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0)$.

Thm 12 : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$.
- Si les fonctions f_n sont positives, alors $\int_X \left(\sum_{n\geq 0} f_n\right) d\mu = \sum_{n\geq 0} \int_X f_n\, d\mu$
- Si $\sum_{n\geq 0} \int_X |f_n|\, d\mu < +\infty$, alors les fonctions f_n, $\sum_{n\geq 0} |f_n|$ et la fonction définie μ-pp $\sum_{n\geq 0} f_n$ sont intégrables et $\int_X \left(\sum_{n\geq 0} f_n\right) d\mu = \sum_{n\geq 0} \int_X f_n\, d\mu$.

App 13 : Lemme de Borel-Cantelli : Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une famille de parties de $\mathcal{A}$. Alors :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty \implies \mu\left(\overline{\lim_n} A_n\right) = 0.$$

2) Intégrales à paramètres

On considère $f : E \times X \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

[B-P] p.138 **Thm 14** : Soit $u_0 \in E$. Si
- $\forall u \in E$, $x \longmapsto f(u,x)$ est mesurable
- μ-pp, $u \longmapsto f(u,x)$ est continue en u_0
- $\exists\, g \in L^1(\mu)$, $\forall u \in E$, $|f(u,x)| \leq g(x)$ μ-pp,

alors la fonction $F : u \longmapsto \int_X f(u,x)\, d\mu$ est définie en tout point $u \in E$ et est continue en u_0.

[HAU] p.224 **Cte-ex 15** : $f : \mathbb{R} \times [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,t) \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ n'est pas continue.

$F : x \longmapsto \int_0^1 f(x,t)\,dt$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

[GOU] p.333 **App 16** : Le théorème 14 permet de démontrer le théorème de Fubini suivant : soit $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{K}$ continue. Alors
$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

[B-P] p.142 **Thm 17** : On suppose $E = I$ intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Si :
- $\forall u \in I$, $f(u,\cdot) \in L^1(\mu)$
- μ-pp, $u \longmapsto f(u,x)$ est dérivable sur I
- $\exists\, g \in L^1(\mu)$ tq μ-pp, $\forall u \in I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| \leq g(x)$

alors la fonction $F : u \longmapsto \int_X f(u,x)\,d\mu$ est définie et dérivable sur I et $F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\,d\mu$.

[GOU] p.158 **Cor 18** : Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$ et $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Si $f : A \times [a,b] \longrightarrow E$ est continue alors $F : x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\,dt$ est continue sur A.
Si de plus $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $A \times [a,b]$, alors F est de classe C^1 sur A et $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

p.158 **App 19** : Fonction Gamma : $\Gamma :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$

Γ est de classe C^∞ sur $]0;\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\forall x > 0$, $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} (\log t)^n e^{-t} t^{x-1}\,dt$.

II Limites et séries

Les séries peut être vues comme des intégrales par rapport à la mesure de comptage.

1) Continuité et dérivabilité

[HAU] p.258 **Thm 20** : Soient $-\infty < a < b \leq +\infty$, et soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $I = [a,b[$.
Si $\sum f_n$ converge simplement vers F sur I, et si :
- $\sum f_n$ converge uniformément vers F sur I
- $\forall n$, $f_n(x) \xrightarrow[x \to b]{} \ell_n$

Alors F admet une limite en b, $\sum_n \ell_n$ converge et $\lim_{x \to b} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n$.

p.256 **Thm 21** : Si (f_n) est une suite de fonctions définies et continues sur une partie A de $\mathbb{R}$ et si $\sum f_n$ converge uniformément sur A, alors sa somme est continue sur A.

p.257 **Cte-ex 22** : $f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (1-x)x^n$

$\sum f_n$ converge simplement sur $[0;1]$ et sa somme est $S : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ qui est discontinue.

p.263 **Thm 23** : Soit I un intervalle et $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies et dérivables sur I. Si :
- $\sum f_n$ converge simplement sur I
- $\sum f_n'$ converge uniformément sur I

Alors $\sum f_n$ converge uniformément sur toute partie bornée de I, la somme f de $\sum f_n$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$.

2) Séries entières

[Gou] p237

Def 24 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle rayon de convergence (RdC) de $\sum a_n z^n$ le nombre $R = \sup\{r>0 \,/\, (|a_n| r^n)_n \text{ est bornée}\}$.

Thm 25 Soit $\sum a_n z^n$ de RdC R

- $\forall z\in\mathbb{C}$, $|z|<R \Rightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument.
- $\forall z\in\mathbb{C}$, $|z|>R \Rightarrow \sum a_n z^n$ diverge.
- Pour tout r tel que $0\leq r<R$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\{z\in\mathbb{C} \,/\, |z|\leq r\}$.

Def 26 : Le disque ouvert $\{z\in\mathbb{C}\,/\,|z|<R\}$ est appelé disque de convergence de la série entière.

p 238

Thm 27 : La somme f de la série entière $\sum a_n z^n$ de RdC R est de classe C^∞ sur $]-R;R[$.
De plus pour tout $p\in\mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est la somme sur $]-R;R[$ d'une série entière de RdC R. En outre, $\forall p\in\mathbb{N}$, $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$ donc $\forall z\in\mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p$

App : Convergence au bord du disque de convergence :

DVPT p 253-254

Thm 28 (Théorème d'Abel angulaire)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de RdC ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité.
On fixe $\theta_0\in[0;\pi/2[$ et on pose
$\Delta_{\theta_0} = \{z\in\mathbb{C}\,/\,|z|<1 \text{ et } \exists \rho>0, \exists\theta\in]-\theta_0;\theta_0[, z = 1-\rho e^{i\theta}\}$.
Alors $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

App 29 : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

Thm 30 (Théorème taubérien faible)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de RdC 1 et f sa somme sur le disque unité. On suppose que $\exists S\in\mathbb{C}$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = S$.
Si $a_n = o(1/n)$ alors $\sum a_n$ converge, et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$.

3) Séries doubles

[Gou] p208

Thm 31 : Soit $(u_{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}}$ une suite à doubles entrées à valeurs dans un espace de Banach. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1) $\forall q\in\mathbb{N}$, $\sum_p u_{p,q}$ est absolument convergente et $\sum_q \left(\sum_{p=0}^{\infty} \|u_{p,q}\|\right)$ converge.
2) $\forall p\in\mathbb{N}$, $\sum_q u_{p,q}$ est absolument convergente et $\sum_p \left(\sum_{q=0}^{\infty} \|u_{p,q}\|\right)$ converge.

Dans ces hypothèses on a : $\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q}\right)$

[HAU] p 125

Cte-ex 32 : $u_{n,p} = \begin{cases} -\frac{1}{2^n} & \text{si } n\geq 1 \\ 1 & \text{si } n=0 \end{cases}$

$\sum_{n\geq 0} u_{n,p}$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p} = 0$, donc $\sum_{p\geq 0}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p}\right)$ converge et sa somme est nulle.
Mais $\forall n\in\mathbb{N}$, u_n est, pour tout $p\in\mathbb{N}$, 1 ou $-\frac{1}{2^n}$, donc $\sum_{p\geq 0} u_{n,p}$ diverge.

[FGN] A1 1 p 14

App 33 : (Nombres de Bell)
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on note B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1;n]\!]$, avec $B_0 = 0$.
Alors $B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$.

III | Applications

1) Holomorphie

[Gou] p 67

Thm 34 : Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré, U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U\times X \longrightarrow \mathbb{C}$. Posons $F(z) = \int_X f(z,x)\,d\mu(x)$.
Si :
- $\forall z\in U$, $x\mapsto f(z,x)$ est mesurable
- $\exists N\subset X$ de mesure nulle tel que $\forall x\notin N$, $z\mapsto f(z,x)$ est holomorphe
- $\forall K\subset U$ compact, il existe $g\in L^1(X)$ telle que $|f(z,x)|\leq g(x)$, $\forall x\notin N$, $\forall z\in K$

Alors F est holomorphe sur U et $\forall z\in U$, $\forall n\in\mathbb{N}$,
$F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,x)\,d\mu(x)$.

DVPT [Z-Q] p.31 **App 35** : La fonction Γ se prolonge de façon holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \,/\, z \neq -n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

App 36 : Calcul de la fonction caractéristique d'une loi normale : si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = e^{-t^2/2}$

2) Analyse de Fourier

[GOU] p.258 **Def 37**. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On appelle coefficients de Fourier de f les nombres complexes définis par :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt,\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$$

p.163 **Thm 38** (Théorème de Riemann-Lebesgue)

$$c_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\quad a_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\quad b_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

DVPT p.273 **App 39** (Formule sommatoire de Poisson)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1 vérifiant

$f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $|x| \to +\infty$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f^*(n)\, e^{2i\pi nx}$

où $f^*(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-2i\pi nt}\, dt$

p.298 **Def 40**. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \in L^1$. La transformée de Fourier de f est la fonction $\hat{f}$ définie en tout point ξ de $\mathbb{R}^d$ par : $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x\rangle} f(x)\, dx$

[B-P] p.298 **Thm 41** : . $\hat{f}$ est uniformément continue et bornée.

. $\forall f \in L^1$, $\lim_{|\xi|\to\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$ (Riemann-Lebesgue)

p.303 **Ex 42**. Transformée de Fourier de la gaussienne : Si $\varphi_d(x) = e^{-|x|^2}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\hat{\varphi}_d(\xi) = \pi^{d/2} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}}$

[GOU] Gourdon, Analyse, 2ème édition

[B-P] Briane, Pagès, Théorie de l'intégration, 5ème édition

[HAU] Hauchecorne, Les contre-exemples en mathématiques, 2ème édition

[Z-Q] Zuily-Queffelec, Analyse pour l'agrégation, 4ème édition

[O-A] Beck, Malick, Peyré, Objectif agrégation, 2ème édition

[FGN] Al 1 Francinou, Gianella, Nicolas, Oraux X-ENS Algèbre 1