

I. Espace de Schwartz et distributions tempérées

1. Espace de Schwartz $S(\mathbb{R}^d)$ [ZUI]

Def 1: L'espace $S = S(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble: p. 107
 $\{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \exists C_{\alpha, \beta} > 0, |x^\alpha \partial^\beta u(x)| \leq C_{\alpha, \beta} \forall x \in \mathbb{R}^d\}$

Prop 2: Muni des semi-normes $\|u\|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta u(x)|$, S est un espace vectoriel métrisable et complet. p. 108

Ex 3: $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset S$ p. 107
 $u(x) = e^{-|x|^2}$ est dans S .

Def 4: On note $O_M(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ tels que: p. 112
 $\exists k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \exists C_\alpha > 0, |\partial^\alpha f(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^k, \forall x \in \mathbb{R}^d$.

Prop 5: Soit $f \in O_M(\mathbb{R}^d)$ alors $u \mapsto f u$ est continue de S dans S . En particulier, cela est vrai pour $f = x^\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d$. p. 111
 $\bullet \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, u \mapsto \partial^\alpha u$ est continue de S dans S . p. 112
 $\bullet S$ est stable par produit et par convolution.

Prop 6: $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans S . p. 108

Prop 7: S est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$. p. 108

2. Distributions tempérées [ZUI]

Def 8: $S' = S'(\mathbb{R}^d)$ est le dual topologique de $S(\mathbb{R}^d)$, i.e. l'ev des formes linéaires continues de S dans $\mathbb{C}$. p. 112
 $T: S \rightarrow \mathbb{C}$ linéaire est dans S' si:

$$\exists k, l \in \mathbb{N}, \exists C > 0: |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{|x| \leq l} |x^\alpha \partial^\alpha \varphi(x)|, \forall \varphi \in S.$$

Prop 9: $S' \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ p. 112
 $\bullet$ Pour $1 \leq p \leq +\infty, S \subset L^p(\mathbb{R}^d) \subset S'$ p. 113

Ex 10: $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable tq $\forall x \in \mathbb{R}^d, |f(x)| \leq P(x)$ où P est un polynôme alors $f \in S'$. p. 113

[ZUI]
DVT 1 $\bullet \varphi(\frac{1}{x}) \in S'$ p. 117
 $\bullet \delta_0 \in S'$

Cor 11: $\forall \varepsilon > 0, e + \varepsilon |x| \notin S'$ p. 113

Def 12: (Convergence des suites dans S'). Soit $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de S' et $T \in S'$. On dit que $T_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} T$ si: p. 113
 $\forall \varphi \in S \lim_{j \rightarrow +\infty} \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$.

Def 13: Soit $T \in S'(\mathbb{R}^d)$ et $\omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert. On dit que T est nulle dans ω si $\langle T, \varphi \rangle = 0 \forall \varphi \in S$ tq $\text{supp } \varphi \subset \omega$. Le support de T est alors le complémentaire du plus grand ouvert où T est nulle. p. 24-25

Ex 14: $\bullet \text{supp } \delta_x = \{x\}$
 $\bullet \text{supp}(\varphi(\frac{1}{x})) = \mathbb{R}$

Prop 15: $E' \subset S'$, où E' désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des distributions à support compact.

3. Opérations sur les distributions tempérées [ZUI]

Prop 16: Soit $f \in O_M(\mathbb{R}^d)$ et $T \in S'$ alors $fT \in S'$, où $\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle, \forall \varphi \in S$. p. 112

Ex 17: Soit $T \in S'(\mathbb{R})$ alors $xT = 0 \Leftrightarrow T = C\delta_0$ où $C \in \mathbb{C}$. p. 36

Thm / Def 18: Soit $T \in S'$. Alors $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ est définie par $\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle, \forall \varphi \in S$. p. 36
 Plus généralement, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$. p. 37

Ex 19: $\bullet -(\varphi(\frac{1}{x}))' = P\delta \frac{1}{x^2}$ [ZUI exo] p. 30, solution p. 66.
 où $\langle (P\delta \frac{1}{x^2}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x) dx}{x^2} - 2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right)$

$\bullet H' = \delta_0$ et $H'' = \delta_0$ où $H = 11_{[0, +\infty[}$ fonction de Heaviside. p. 38
 $\bullet$ Soit $T \in S'(\mathbb{R}^d)$, alors $T' = 0 \Leftrightarrow T = \text{constante}$. p. 38

Prop 20: Si $T_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} T$ alors $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, (\partial^\alpha T_j) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \partial^\alpha T$. p. 56

Prop 21: (Formule de Leibniz) Soit $f \in O_M(\mathbb{R}^d)$ et $T \in S'$ alors $\partial^\alpha (fT) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} T$ où $\alpha \in \mathbb{N}^d$. p. 2

Prop / Def 22: Soit $T \in S'$ et $S \in E'$. $\forall \varphi \in S$, on définit $T * S \in S'$ par $\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \mapsto \langle S, \varphi(y + \cdot) \rangle \rangle$. p. 67

Prop 23: Soit $T \in \mathcal{S}'$ et $S \in \mathcal{E}'$ on a:

- (i) $T * S = S * T$ p. 68
- (ii) $T * \delta_0 = \delta_0 * T = T$
- (iii) $\partial^\alpha (T * S) = (\partial^\alpha T) * S = T * (\partial^\alpha S)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$.

Prop 24: Soit $T \in \mathcal{E}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$. Alors

- (i) $(T * \varphi)(x) := \langle T, y \mapsto \varphi(x-y) \rangle$
- (ii) $\text{supp}(T * \varphi) \subset \text{supp } T + \text{supp } \varphi$ p. 69

C-ex 25 Le produit de convolution n'est pas associatif en général. $T = 1$, $S = \delta'_0$, $U = H$ (fonction de Heaviside):

$$(1 * \delta'_0) * H = 0 \quad \text{car} \quad 1 * \delta'_0 = (1)' * \delta_0 = 0 * \delta_0 = 0 \quad \text{p. 71}$$

$$1 * (\delta'_0 * H) = 1 \quad \text{car} \quad \delta'_0 * H = \delta_0 * (H)' = \delta_0 * \delta_0 = \delta_0$$

II. Transformation de Fourier

1. Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$ [ZUI]

Def 26: Soit $u \in \mathcal{S}$. On note $\hat{u}$ ou Fu la transformée de Fourier de u définie par:

$$\hat{u}(\xi) = Fu(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d \quad \text{p. 108}$$

Rq: Cette définition a bien un sens car $e^{-i\langle x, \xi \rangle} u \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Ex 27: Soit $\gamma \in \mathbb{C}$, $\text{Re } \gamma > 0$ et $u(x) = e^{-\gamma |x|^2}$. On a

$$\hat{u}(\xi) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma}}\right)^n e^{-\frac{|\xi|^2}{4\gamma}} \quad \text{p. 108}$$

Thm 28: La transformation de Fourier F est une application linéaire bijective bicontinue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$. Si on pose pour $v \in \mathcal{S}$,

$$\bar{F}v(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} v(\xi) d\xi \quad \text{p. 109}$$

alors $\bar{F}$ envoie $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ et $F\bar{F} = \bar{F}F = \text{Id}_{\mathcal{S}}$, i.e. $F^{-1} = \bar{F}$

Thm 29: Pour $u, v \in \mathcal{S}$, on a:

- (i) $\int \hat{u}(\xi) v(\xi) d\xi = \int u(x) \hat{v}(x) dx$
- (ii) $\int u(x) \hat{v}(x) dx = (2\pi)^{-n} \int \hat{u}(\xi) \hat{\hat{v}}(\xi) d\xi$ p. 111
- En particulier, $\int |u(x)|^2 dx = (2\pi)^{-n} \int |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$
- (iii) $F(u * v) = \hat{u} \hat{v}$
- (iv) $\widehat{u \cdot v} = (2\pi)^{-n} \hat{u} * \hat{v}$

$$(v) \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial x_j} = \xi_j \hat{u}$$

$$(vi) x_j u = -\frac{1}{i} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi_j}$$

Thm 30: On prend ici la normalisation $\hat{u}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x t} u(t) dt$. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$. (Formule sommatoire de Poisson)

En particulier, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$ [600] p. 272-273

2. Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$ [ZUI]

Thm/Def 32: Soit $T \in \mathcal{S}'$. La transformée de Fourier de T , notée $\hat{T}$ ou $\hat{T}$, est la forme linéaire sur $\mathcal{S}$ définie par: $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, $\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, F\varphi \rangle$. On a $\hat{T} \in \mathcal{S}'$. p. 114

Thm 33: La transformation de Fourier est une application linéaire, bijective et bicontinue sur les suites de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$ et $F^{-1} = \bar{F}$. p. 114

Thm 34:

(i) La transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$ coïncide avec la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$ si $T \in \mathcal{S}$. p. 114

Pour $T \in \mathcal{S}'$, on a:

- (ii) $F\hat{T} = (2\pi)^n \check{T}$ où $\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$ et $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$
- (iii) $F(\frac{1}{i} \partial_j T) = \xi_j \hat{T}$
- (iv) $F(x_j T) = -\frac{1}{i} \partial_j (\hat{T})$

Ex 35: $T = \nu_p(\frac{1}{2})$ alors $\hat{T} = -2i\pi H + i\pi \delta_0$ où H est la fonction de Heaviside.

- $F\delta_0 = 1$
- $F1 = (2\pi)^n \delta_0$ p. 115

Appl 36 Avec la même normalisation que Thm 30, on obtient $\delta_{\mathbb{Z}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k = \hat{\delta}_{\mathbb{Z}}$ [WIL] p. 145

III - Application aux équations aux dérivées partielles

1. Résolution de l'équation de la chaleur [BON] p.187

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \Delta u(t, x) = 0 & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d \text{ ex 9.6.8} \\ u(0, x) = \delta_0(x) \end{cases}$$

(1) possède une unique solution (appelée solution élémentaire)
E tempérée et à support dans $t \geq 0$ et on a

$$E = \mathcal{F}^{-1}(H(t) e^{-t|\xi|^2}) \text{ où } H \text{ est la fonction de Heaviside}$$
$$E = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|\xi|^2/4t} H(t)$$

Méthode: • $\mathcal{F}$ transforme (1) en une EDO dont la solution est $\hat{u}(t, \xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{\delta}_0(\xi)$

$$• K(t, \xi) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|\xi|^2/4t} H(t)$$

La transformée de Fourier de K dans S' par rapport à ξ donne bien $H(t) e^{-|\xi|^2 t}$

$$• \hat{u} = \hat{K} \hat{\delta}_0 = \hat{K} * \hat{\delta}_0 = \hat{K} \text{ puis } u = K \text{ (par transformée de Fourier inverse).}$$

2. Équation de Laplace [BON] p.182 ex 9.5.9

$$(2) \Delta u = 0 \text{ où } u \in S'(\mathbb{R}^d).$$

Méthode: • $\mathcal{F}$ transforme (2) en $-|\xi|^2 \hat{u} = 0$

• La restriction de $\hat{u}$ au complémentaire de l'origine est donc 0 donc $\text{supp } \hat{u} = \{0\}$.

• $\hat{u}$ est donc une somme de dérivées de δ_0 .

Thm 37: les solutions de (2) sont des polynômes.

Corollaire 38: Soit f une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^d$.

- Si f est majorée par un polynôme, f est polynomiale.
- Si f est bornée, f est constante.
- Si f tend vers 0 à l'infini, f est nulle.

[ZUI]: Claude Zuihy, Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles.

[BON]: Jean-Nichel Bony, Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier.

[ZUI ex]: Claude Zuihy, Distributions et équations aux dérivées partielles. Exercices corrigés.