

Cadre: On considère $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.

I) Premières propriétés et exemples

1) Variables aléatoires discrètes, loi de probabilité

Def 1: Soit E un ensemble. On dit qu'une application X de Ω dans E est une variable aléatoire discrète si:

- (i) $X(\Omega)$ est dénombrable
- (ii) $\forall x \in E, X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$

Rq 2: On prend souvent $E = \mathbb{N}^n, \mathbb{Z}^n$.

Prop/Def 3: Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $X: \Omega \rightarrow E$ une v.a.d. La loi de probabilité de X est l'application $E \rightarrow [0, 1]$
 $x \mapsto \mathbb{P}(X=x) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\})$.

Ex 4: On considère 6 dés équilibrés et discernables. La probabilité que toutes les faces exhibent un chiffre différent quand on les lance simultanément est $\frac{6!}{6^6} = \frac{720}{46656}$.

2) Lois usuelles

• Loi de Bernoulli $b(p)$, $0 < p < 1$:

Si $X \sim b(p)$, $\mathbb{P}(X=1) = p$ et $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$.

La loi de Bernoulli $b(p)$ est la loi de la v.a.d. associée à une épreuve de Bernoulli, ie une expérience aléatoire avec deux résultats possibles, le succès et l'échec, où la v.a.d. prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.

Ex 5: La loi $b(1/2)$ est utilisée pour modéliser le jet d'une pièce dans un jeu de pile ou face équilibré.

• Loi binomiale $B(n, p)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < p < 1$:

Si $X \sim B(n, p)$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$.

La loi $B(n, p)$ représente la loi du nombre de succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p .

Ex 6: La loi du nombre de filles parmi n enfants d'une famille est une loi binomiale.

• Loi uniforme sur un ensemble fini Ω , $U(\Omega)$.

La loi uniforme sur un ensemble fini Ω est la probabilité qui attribue la même valeur à la probabilité de chaque événement élémentaire $\{\omega\}$.

Pour toute partie A de Ω , $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Ex 7: On lance n fois un dé équilibré et on cherche la probabilité d'obtenir k fois un 6. On prend $\Omega = \{1, \dots, 6\}^n$ et on introduit $A_k = \{(x_1, \dots, x_n) / x_i = 6 \text{ pour } k \text{ indices exactement}\}$. On a $\mathbb{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{k} 5^{n-k}}{6^n}$.

• Loi de Poisson $P(\lambda)$, $\lambda > 0$:

Si $X \sim P(\lambda)$, alors $\mathbb{P}(X=n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, $n \in \mathbb{N}$.

La loi de Poisson intervient dans la modélisation de phénomènes de comptage comme le nombre de désintégrations atomiques dans un corps radioactif pendant un intervalle de temps, le nombre d'arrivées à un guichet, le nombre de gouttes de pluie sur une surface donnée.

• Loi géométrique $g(p)$, $0 < p < 1$:

Si $X \sim g(p)$, $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

La loi géométrique représente la loi du nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir un succès dans la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p .

3) Espérance, variance

Def 8: Soit X une v.a. réelle discrète. Si la somme $\sum_{x \in \mathbb{R}} x \mathbb{P}(X=x)$ est finie, on dit que X possède une espérance, et le nombre $\sum_{x \in \mathbb{R}} x \mathbb{P}(X=x)$ est appelé espérance de X , noté $E[X]$.

Ex 9: Si $a \in \mathbb{R}$, $E[a] = a$.

• Toute v.a.d. bornée admet une espérance.

[Couv1] p. 20-22

[Couv1] p. 243

[Couv1] p. 243

x22

p. 16

[Couv1]

p. 243-244

[Couv1] p. 115-117

Thm 10 (Thm de transfert)

Soit X une v.a.d prenant ses valeurs dans E . Soit une application $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Alors $Y = f(X)$ est une v.a.d réelle et pour qu'elle admette une espérance il faut et il suffit que $\sum_{x \in E} |f(x)| P(X=x)$ soit finie.

Dans ce cas, $E[f(X)] = \sum_{x \in E} f(x) P(X=x)$.

Ex 11: $E[b(p)] = p$; $E[B(n,p)] = np$; $E[P(\lambda)] = \lambda$;
 $E[g(p)] = \frac{1}{p}$.

Def 12: Soit X une v.a.d réelle. Si $E[X^2] < +\infty$, alors X admet une espérance, et le réel $E[(X - E[X])^2]$ est appelé variance de X , et noté $\text{Var}(X)$.

Rq 13: Par le théorème de transfert on a:

$\text{Var}(X) = \sum_{x \in \mathcal{V}(X)} (x - E[X])^2 P(X=x)$.

Ex 14: $\text{Var}(b(p)) = p(1-p)$; $\text{Var}(B(n,p)) = np(1-p)$;
 $\text{Var}(P(\lambda)) = \lambda$; $\text{Var}(g(p)) = \frac{(1-p)}{p^2}$.

Thm 15: Soit $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue, w son module de continuité ($w(h) = \sup\{|f(u) - f(v)|, |u-v| < h\}$).

Soit pour $n \geq 1$, $x \in [0,1]$, $B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$.

- Alors 1) B_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$
2) $\exists C \in \mathbb{R}$, $\|f - B_n\|_\infty \leq C w(\frac{1}{\sqrt{n}})$.
3) $\exists f$ lipschitzienne tq $\|f - B_n\|_\infty \geq \delta w(\frac{1}{\sqrt{n}})$, $\delta \in \mathbb{R}$.

II) Opérations et caractérisation de v.a.d

1) Indépendance

Def 16: Soit I un ensemble fini non vide, $(X_i)_{i \in I}$ une famille de v.a. à valeurs respectivement dans $(E_i, \mathcal{E}_i)$ des espaces probabilisables. On dit que les X_i sont indépendantes si pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'ensembles avec $A_i \in \mathcal{E}_i$ on a: $P(\bigcap_{i \in I} (X_i \in A_i)) = \prod_{i \in I} P(X_i \in A_i)$.

Prop 17: Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de v.a.d à valeurs respectivement dans des ensembles E_i , $1 \leq i \leq n$. Les X_i sont indépendantes ssi $\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$,
 $P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n)$.

Ex 18: On jette deux des équilibrés, et on considère X_1 et X_2 les v.a. qui modélisent le résultat de chacun des dés. La tribu $\sigma(X_1)$ engendrée par X_1 est formée des ensembles $A_1 \times \{1, \dots, 6\}$ où $A_1 \subset \{1, \dots, 6\}$ et de même pour $\sigma(X_2)$. Alors pour $A = A_1 \times \{1, \dots, 6\} \in \sigma(X_1)$ et $B = \{1, \dots, 6\} \times B_2 \in \sigma(X_2)$,
 $P(A \cap B) = P(A_1 \times B_2) = \sum_{(i,j) \in A_1 \times B_2} \frac{1}{36} = \sum_{i \in A_1} \frac{1}{6} \sum_{j \in B_2} \frac{1}{6} = P(A_1) P(B_2) = P(A) P(B)$.

Donc X_1 et X_2 sont indépendantes.

2) Somme de v.a.d indépendantes

Prop 19: Soient $X_1, X_2: \Omega \rightarrow E$ deux v.a.d indépendantes, avec E une partie d'un groupe abélien stable par addition. Alors la v.a. $X_1 + X_2$ est discrète et sa loi est donnée par: $\forall x \in E$,
 $P(X_1 + X_2 = x) = \sum_{x_1 \in E} P(X_1 = x_1) P(X_2 = x - x_1) = \sum_{x_2 \in E} P(X_2 = x_2) P(X_1 = x - x_2)$.

Ex 20: Si $X_1 \sim P(\lambda_1)$, $X_2 \sim P(\lambda_2)$ avec $X_1 \perp X_2$, alors $X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$.

La loi d'une somme de n v.a. indépendantes suivant la loi $b(p)$ est $B(n,p)$.

3) Fonction génératrice

Def/Prop 21: Soit X une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors pour tout $s \in [-1,1]$, $E[s^X] < \infty$. Quand cette quantité existe, on note $G_X(s) = E[s^X]$, appelée fonction génératrice de X .

Ex 22: Si $X \sim b(p)$, alors $\forall s \in [-1,1]$, $G_X(s) = ps + 1-p$.
Si $X \sim P(\lambda)$, alors $\forall s \in [-1,1]$, $G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$.

Prop 23: On note $p_n = P(X=n)$. On a:

- 1) G_X est définie sur au moins $[-1; 1]$ et $\forall s \in [-1; 1], |G_X(s)| \leq 1$ et $G_X(1) = 1$.
- 2) $\forall s \in [-1; 1], G_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$
- 3) G_X est continue sur $[-1; 1]$ et C^∞ sur $] -1; 1[$.
- 4) G_X caractérise la loi de X et $P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Prop 24: Si X et Y sont deux va indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, alors:
 $\forall s \in [-1; 1], G_{X+Y}(s) = G_X(s) G_Y(s)$.

App 25: Si $X \sim B(n, p)$, alors $\forall s \in [-1; 1], G_X(s) = (ps + 1 - p)^n$.

App 26: Processus de Galton-Watson.

Soit X une va intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On note $p_k = P(X=k)$, $m = E[X]$. On définit $\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n} \end{cases}$ avec

les $(X_{i,j})_{i,j}$ iid de même loi que X .

Alors, en notant $\Pi_\infty = P(\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0)$, on a:

si $m \leq 1$, $\Pi_\infty = 1$, et si $m > 1$, Π_∞ est l'unique point fixe de G_X sur $[0; 1]$.

III Théorèmes limites

1) Approximation de loi de Poisson

Prop 27: Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et X des va à valeurs entières.
 Alors $X_n \xrightarrow{d} X$ ssi $\forall k \in \mathbb{N}, P(X_n = k) \xrightarrow{n} P(X = k)$.

Thm 28 (Thm de Poisson)

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0; 1]^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n \sim B(n, p_n)$. Alors $S_n \xrightarrow{d} P(\lambda)$.

Ex 29: Parmi 500 personnes, le nombre de personnes nées le 1er janvier suit la loi $P(\frac{500}{365})$.

Thm 30 (Evénements rares de Poisson)

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une famille $\{A_{n,j} / 1 \leq j \leq n\}$ d'événements indépendants définis sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On note $p_{n,j} = P(A_{n,j})$ et $S_n = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{A_{n,j}}$.

On suppose: $\prod_{n \rightarrow \infty} p_{n,j} \rightarrow 0$; $\max_{1 \leq j \leq n} p_{n,j} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$; $\sum_{j=1}^n p_{n,j} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda > 0$
 Alors $S_n \xrightarrow{d} P(\lambda)$.

Rq 31: Ce théorème montre qu'un phénomène aléatoire qui peut se représenter comme une superposition d'événements rares et indépendants suit approximativement une loi de Poisson.

2) Loi des grands nombres et théorème central limite

Thm 32 (Loi faible des grands nombres)

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de va iid de même loi qu'une va X , et soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Si $E[X] < \infty$, alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} E[X]$.

App 33: Théorème de Bernoulli

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants de même probabilité p . Alors $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{A_j} \xrightarrow{P} p$.

App 34: La moyenne empirique est un estimateur consistant de la moyenne.

Thm 35 (Thm central limite)

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de va iid de moyenne $m < \infty$ et de variance $\sigma^2 < \infty$.

Alors $\frac{S_n - nm}{\sqrt{no\sigma^2}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$.

App 36: Si $S_n \sim B(n, p)$ alors en notant $\tilde{S}_n = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}}$, on a $\sup_{-\infty < a < b < \infty} |P(a < \tilde{S}_n \leq b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2} dt| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

App 37: Si $X_n \sim b(p)$, alors $[\frac{S_n}{n} - \frac{b}{n} \sqrt{\frac{S_n(1-S_n)}{n}}; \frac{S_n}{n} - \frac{a}{n} \sqrt{\frac{S_n(1-S_n)}{n}}]$ contient p avec une probabilité proche de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2} dt$ quand n est grand.

Ex 38: On jette 12000 fois un dé équilibré.

Le nombre de 6 obtenu suit la loi $B(12000, 1/6)$.

La probabilité que le nombre de 6 obtenus soit entre 1800 et 2100 vaut environ

$\Phi(\frac{2100 - 2000}{\sqrt{12000 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}}) - \Phi(\frac{1800 - 2000}{\sqrt{12000 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}}) \approx 0,992$ où Φ est la f.m. d'une $\mathcal{N}(0, 1)$.

Références

[Ouv1]: Ouvrard, Probabilités 1

[Ouv2]: Ouvrard, Probabilités 2

[B-L]: Boriche, Ledoux, Probabilité