Examen de remédiation 3ème année GM

DURÉE : 1h30. Documents et appareils électroniques interdits.

Exercice 1 Calculer les intégrales multiples suivantes :

1. $J = \displaystyle\int\int_E xydxdy$ où $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 \leqslant y,\ y^2 \leqslant x\}$. On représentera le domaine.
2. Soit $A = [0, 1] \times]0, +\infty[$. Montrer que la fonction $f : (x, y) \to e^{-y} \sin(2xy)$ est intégrable sur A, et calculer $J = \displaystyle\int\int_A f(x, y)dxdy$. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{y}(sin(y))^2 e^{-y} dy$.

Exercice 2 On définit $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ par $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$
2. Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - (at + b))^2 dt$. On se servira d'une méthode de projection avec le produit scalaire ci-dessus. (on rappelle que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} = n!$)

Exercice 3 Soit A=$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer $P \in GL_3(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $P^{-1}AP$ soit de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ (on ne demande pas de calculer P^{-1}).
3. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 8x - y - 5z \\ y' = -2x + 3y + z \\ z' = 4x - y - z \end{cases} \tag{1}$$

Exercice 4 Rappeler la définition d'une suite convergente de limite ℓ et d'une suite de Cauchy.
Puis vrai ou Faux ? (arguments ou contre-exemple).

1. Soit (u_n) une suite de réels et ℓ un réel
   (a) (u_n) converge vers ℓ si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0,\ (u_n - \ell) \in] - 1/k, 1/k[$.
   (b) (u_n) converge vers ℓ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0,\ (u_n - \ell) \in] - \varepsilon^2, \sqrt{\varepsilon}[$.
   (c) (u_n) converge vers ℓ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0,\ (u_n - \ell) < \sqrt{\varepsilon}$.
   (d) (u_n) converge vers ℓ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n > n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$.
2. Soit (u_n) une suite de réels
   (a) Si (u_n) ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$ alors (u_n) est bornée
   (b) Si (u_n) tend vers $+\infty$ alors (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
   (c) Si les suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) convergent alors (u_n) bornée.

Exercice 5 On rappelle que pour $X = (x_i) \in \mathbb{R}^n$, $\|X\|_\infty = \max_{i\in\{1\dots n\}} \big(|x_i|\big)$ et $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

1. Définition de la norme subordonnée $|||.|||$ associée à la norme vectorielle $\|.\|$
2. Montrer que pour $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_1 = \max_{j\in\{1\dots n\}} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|\right)$
3. Puis que $|||A|||_\infty = \max\limits_{i\in\{1\dots n\}} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\right)$.
4. Montrer que le rayon spectral de A vérifie $\rho(A) \leqslant |||A|||$ pour toute norme subordonnée $|||\ |||$