Remédiation 2015-2016

TD3 : ss-espaces supplémentaires, Gram-Schmidt, projection orthogonale, distance à un sev

Exercice 1 *Soit A un polynôme de $\mathcal{K}_n[X]$ non nul. On pose $F = \{P \in \mathcal{K}_n[X]/A$ divise $P\}$. Déterminer un supplémentaire de F puis la dimension de F.*

Exercice 2

1. *Dans $\mathbb{R}^3$, trouver un vecteur orthogonal au plan d'équation $ax + by + cz = 0$ où a,b et c sont des réels fixés avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.*
2. *En déduire une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ dont les 2 premiers vecteurs appartiennent au plan d'équation $x - y + z = 0$.*

Exercice 3 *Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \sum_{i=0}^{4} P(i)Q(i)$. Vérifier qu'on a bien un produit scalaire. Trouver une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.*

Exercice 4 *Calculer $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (t^3 - (at^2 + bt + c))^2 dt$ en précisant le produit scalaire utilisé et le sous-espace vectoriel sur lequel on projette.*

Exercice 5 *Soient $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et F le sous-espace vectoriel d'équation dans $\mathcal{B}$:*

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases} \tag{1}$$

1. *Trouver une base orthonormée de F.*
2. *En déduire $d(e_1, F)$.*

Exercice 6 *BONUS. Soit E un espace réel muni d'un produit scalaire $(\ |\ )$, soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. On note $G(u_1, \ldots, u_n) = det((u_i|u_j)_{1\leq i,j\leq n})$*

1. *Montrer que si $(u_1, \ldots, u_n)$ est liée alors $G(u_1, \ldots, u_n) = 0$.*
2. *Dans la suite, $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre et on pose $F = Vect(u_1, \ldots, u_n)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de F et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $(u_1, \ldots, u_n)$. Exprimer $G(u_1, \ldots, u_n)$ en fonction de P et de ${}^tP$. En déduire que $G(u_1, \ldots, u_n) > 0$.*
3. *Soit $x \in E$, montrer que $d(x, F) = \sqrt{\frac{G(x,u_1,\ldots,u_n)}{G(u_1,\ldots,u_n)}}$*