Colles de la semaine du 4 au 8 décembre 2017

Cours 1. Passage à la limite dans une inégalité.

Cours 2. Soit u une suite croissante. Discuter de la convergence de u.

Cours 3. Soient u et v deux suites adjacentes. Montrer quelles convergent vers la même limite.

Cours 4. Théorème des segments emboîtés.

Cours 5. Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Cours 6. Montrer que l'ensemble des décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{C}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Que dire de la limite de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad b_n = \frac{u_1a_1 + \cdots + u_na_n}{u_1 + \cdots + u_n} \quad ?$$

Exercice 2. Soit $\alpha > 0$ un nombre irrationnel et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres rationnels qui converge vers α. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ avec $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $p_n, q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 3. 1. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$ telles que de toute sous-suite de (x_n) on peut extraire une suite convergeant vers ℓ. Montrer que (x_n) converge vers ℓ.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a, b]^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $\ell \in [a, b]$ tel que pour toute extraction φ telle que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge on a $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Montrer que (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n + \dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$. Étudier la limite de u_n.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Discuter de la limite de (u_n).

Exercice 6. Discuter selon la valeur de $a > 0$ la convergence de la suite $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + a^k)$.