Colles de la semaine du 22 au 26 janvier 2018

Cours 1. Théorème des valeurs intermédiaires.

Cours 2. Image d'un segment par une application continue.

Cours 3. Injectivité équivaut à stricte monotonie sous hypothèse de continuité sur un intervalle.

Cours 4. Soit f une fonction monotone sur I. f est continue sur I si, et seulement si, $f(I)$ est un intervalle.

Cours 5. Théorème de la bijection.

Cours 6. Théorème de Heine.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et positive. On suppose qu'il existe $\ell \in [0,1[$ telle que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$. Montrer que f possède un point fixe.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3. Soit G un sous-groupe du groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$. On suppose que G est de cardinal n et que $\forall f \in G,\ f^n = f \circ \cdots \circ f = \mathrm{Id}$. Montrer que $n \leq 2$.

Exercice 4. Déterminer les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x)f(y)$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe a et $b > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq a|x| + b$. La réciproque est-elle vraie.

Exercice 6. Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2}{1+x}$. Montrer que f réalise une bijection. Dresser le tableau de variation de son application réciproque g. Étudier la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$. En déduire un équivalent de g en $+\infty$.