Colles de la semaine du 29 janvier au 2 février 2018

Cours 1. Sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$.

Cours 2. Algorithme d'Euclide.

Cours 3. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$.

Cours 4. Existence d'un diviseur premier.

Cours 5. Décomposition primaire.

Cours 6. Petit théorème de Fermat.

Exercice 1. Soit $P = X^n + c_1 X^{n-1} + \cdots + c_{n-1} X + c_n$ un polynôme à coefficients entiers. Montrer qu'une racine rationnelle de P est nécessairement entière.

Exercice 2. Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $6k - 1$.

Exercice 3. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ telles que $\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $f(ab) = f(a)f(b)$. Lesquelles sont croissantes ?

Exercice 4. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu, \alpha, \beta) \in \mathbb{N}^4$ pour que la fraction $\dfrac{\lambda\alpha^{n+1} + \mu\beta^{n+1}}{\lambda\alpha^n + \mu\beta^n}$ soit irréductible pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le n-ième nombre premier.

1. Montrer que $p_{n+1} \leq p_1 p_2 \cdots p_n + 1$
2. En déduire que $p_n \leq 2^{2^n}$
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. Démontrer que pour x assez grand,
$$\ln(\ln x) \leq \pi(x) \leq x.$$

Exercice 6. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $n^{\pi(2n)-\pi(n)} \leq \displaystyle\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ n < p \leq 2n}} p \leq \binom{2n}{n}$.
2. En déduire que $\pi(2n) - \pi(n) \leq 2 \ln 2 \times \dfrac{n}{\ln n}$ pour $n \geq 2$.
3. Montrer que $\forall n \geq 0$, $(n+1)\pi(2^{n+1}) \leq 3 \times 2^{n+1}$.
4. En déduire une majoration de $\pi(x)$ pour $x \geq 2$.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^n - 1$ est premier. Montrer que n est premier.