Colles de la semaine du 5 au 9 février 2018

Cours 1. Caractérisation des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes (une fonction $\mathcal{C}^k$ dont la dérivée ne s'annule pas sur un intervalle I réalise un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de I sur son image).

Cours 2. Condition nécessaire d'extremum en un point intérieur.

Cours 3. Théorème des accroissements finis + Rolle + dessin.

Cours 4. f dérivable sur l'intervalle I. f est lipschitzienne si et seulement si f' est bornée.

Cours 5. Lien entre signe de la dérivée et monotonie sur un intervalle.

Cours 6. Théorème de point fixe contractant sur un segment stable.

Exercice 1. Formule de Taylor-Lagrange. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f \in \mathcal{C}^n([a,b]) \cap \mathcal{D}^{n+1}(]a,b[)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Exercice 2. Soit f définie par $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\varphi \equiv 1$ sur $[-1,1]$ et $\varphi \equiv 0$ sur $[-2,2]^c$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable en 0 et nulle en 0. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n\ell} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 4. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. Soit $a \in I$. On dit que f admet une dérivée symétrique en a lorsque $\dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ admet une limite finie quand $h \to 0$.

1. Montrer que si f est dérivable à droite et à gauche en a, alors elle admet une dérivée symétrique.
2. Que dire de la réciproque ?

Exercice 5. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ s'annulant en $n+1$ points distincts de I.

1. Montrer que la dérivée n-ième de f s'annule sur I.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la dérivée $(n-1)$-ième de $f' + \alpha f$ s'annule une fois sur I.