Colles de la semaine du 5 au 9 mars 2018

Cours 1. Formule de Taylor et caractérisation de $T_{n,a}(P)$ comme le reste d'une division euclidienne.

Cours 2. Caractérisation de la multiplicité d'une racine à l'aide de la dérivée.

Cours 3. Décrire les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

Cours 4. Décrire les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Cours 5. Factoriser $X^n - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$;
2. $\exists (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$, $P = A^2 + B^2$.

Exercice 2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant dont les racines complexes sont de parties imaginaires positives ou nulles. Montrer que $\mathrm{Re}(P)$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Exercice 4. Soit $a \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$.

Exercice 5. Déterminer les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 & = & 20 \end{array} \right.$$

Exercice 6.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Donner une formule pour le nombre de racines distinctes de P.
2. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ non constants tels que $\mathrm{Rac}(P) = \mathrm{Rac}(Q)$ et $\mathrm{Rac}(P - 1) = \mathrm{Rac}(Q - 1)$. Montrer que $P = Q$.