

Colles de la semaine du 19 au 23 mars 2018

Cours 1.1 Développement limité à l'ordre n en 0 de \exp .

Cours 1.2 Développement limité à l'ordre n en 0 de \cos .

Cours 1.3 Développement limité à l'ordre 5 en 0 de \tan .

Cours 1.4 Développement limité à l'ordre n en 0 de $(1+x)^\alpha$.

Cours 1.5 Développement limité à l'ordre n en 0 de $\ln(1+x)$.

Cours 1.6 Développement limité à l'ordre n en 0 de Arctan .

Cours 2.1 Primitivation d'un développement limité.

Cours 2.2 Formule de Taylor-Young.

Cours 2.3 Développement asymptotique en $+\infty$ à la précision $o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2 \ln^2 x} \right)$ de $\ln(1+x \ln x)$.

Exercice 1.1 Montrer que pour tout entier n , l'équation $x + \ln x = n$ admet une solution unique x_n . Déterminer la monotonie de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi qu'un développement asymptotique à deux termes.

Exercice 1.2 Soient $c > 0$ et $f : [0, c] \rightarrow [0, c]$ une application continue admettant en 0 un développement asymptotique de la forme

$$f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$$

avec $a > 0$ et $\alpha > 1$. Discuter de la définition, de la convergence et d'un équivalent de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Traiter l'exemple de $f : x \mapsto \sin(x)$.

Exercice 1.3 Soit $c > 0$. Montrer que l'équation $x \sin x - c \cos x = 0$ admet une solution x_n dans toute intervalle $\left] n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2} \right[$ et qu'elle n'en admet pas d'autre dans \mathbb{R}_+ . Déterminer un développement asymptotique à 3 termes de x_n .

Exercice 1.4 Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x}$.

Exercice 1.5 Décrire la courbe de $f : x \mapsto (x-1)e^{1/(x-3)}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 1.6 Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la réciproque de $f : x \mapsto x + \ln(1+x)$.

Exercice 2.1 L'ensemble $\{f \in \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R}), f'(a) = f'(b)\}$ forme-t-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b]; \mathbb{R})$.

Exercice 2.2 Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et \mathcal{C} le sous-ensemble composé des fonctions croissantes. L'ensemble $\Delta = \{f - g, f, g \in \mathcal{C}\}$ est-il un espace vectoriel?

Exercice 2.3 L'ensemble des suites convergeant vers 0 est-il un espace vectoriel? et l'ensemble des suites convergeant vers $\ell \neq 0$?