Colles de la semaine du 26 au 30 mars 2018 − MPSI 4

Cours 1 Définir l'espace vectoriel engendré par une partie. Montrer que c'est un espace vectoriel et décrire ses éléments.

Cours 2 Lemme d'échange.

Cours 3 À quelle condition la somme de deux espaces vectoriels est-elle directe ?

Exercice 1 Soient K, L deux corps.

1. Montrer que l'on peut munir $\mathcal{F}(K,L)$ d'une structure de L-espace vectoriel.
2. Soient $f_1,\dots,f_n : K \to L$ des applications telles que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:
   - $\forall x,y \in K,\ f_i(x+y) = f_i(x) + f_i(y)$;
   - $\forall x,y \in K,\ f_i(xy) = f_i(x)f_i(y)$;
   - $f_i(1_K) = 1_L$.

   On suppose que les f_i sont distinctes. Montrer que la famille $(f_1,\dots,f_n)$ est linéairement indépendante sur L.

Exercice 2 Soient E un espace vectoriel, $(e_1,\dots,e_p)$ une famille libre de E, $F = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$ et G un supplémentaire de F dans E. Pour $a \in G$, on définit

$$F_a = \mathrm{Vect}(e_1 + a,\dots,e_p + a).$$

Montrer que $F_a \oplus G = E$. Montrer que pour $a \neq b$ dans G, $F_a \neq F_b$.

Exercice 3 Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base et un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :

- $F = \mathrm{Vect}(u,v)$ où $u = (1,1,0)$ et $v = (2,1,1)$;
- $F = \mathrm{Vect}(u,v,w)$ où $u = (-1,1,0)$, $v = (2,0,1)$ et $w = (1,1,1)$;
- $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + 3z = 0\}$.

Exercice 4 Soient $E_1,\dots,E_n$ et $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E_i \subset F_i$ et $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$. Montrer que $E_i = F_i$.

Exercice 5 Soient $H = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 + \dots + x_n = 0\}$ et $u = (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que H et $\mathrm{Vect}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note

$$F_i = \{p \in E,\ \forall j \in [\![0,n]\!] \backslash \{i\},\ P(j) = 0\}.$$

Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de E et que

$$E = F_0 \oplus \dots \oplus F_n.$$