Colles de la semaine du 2 au 6 avril 2018 – MPSI 4

Cours 1 Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base.

Cours 2 Caractérisation du fait qu'une application linéaire soit bijective par l'image d'une base.

Cours 3 Un projecteur est une projection (au sens géométrique).

Cours 4 Une involution linéaire est une symétrie (au sens géométrique).

Exercice 1 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. On suppose que $p + q$ est un projecteur.
   (a) Montrer que $\operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.
   (b) Montrer que $\operatorname{Ker}(p + q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

Exercice 2. Soit H un hyperplan de E. L'ensemble $H^\perp$ des formes linéaires sur E qui s'annulent sur H est une droite de E^*.

Exercice 3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. À quelle condition a-t-on $u(u^{-1}(F)) = u^{-1}(u(F))$.

Exercice 4 Soient $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in K$ tel que $g(x) = \lambda_x f(x)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $g = \lambda f$.

Exercice 5 Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $u^2 = 0$ si, et seulement si, il existe un projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u = p \circ u - u \circ p$.

Exercice 6 Soient E un K-espace vectoriel et f un endomorphisme de E nilpotent *ie.* tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $f^n = 0$. Montrer que $\operatorname{Id} - f$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.