Colles de la semaine du 9 au 13 avril 2018 – MPSI 4

Cours 1 Pour tout $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$, il existe une approximation uniforme $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],R)$ de f à ε près.

Cours 2 Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Cours 3 Si f est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[a,b]$, alors f y est nulle.

Cours 4 Existence et unicité à une constante additive près d'une primitive d'une fonction continue sur un intervalle.

Cours 5 Formule de Taylor avec reste intégral.

Cours 6 Convergence des sommes de Riemann sur la subdivision régulière de $[a,b]$ dans le cas $\mathscr{C}^1$.

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 2 Soit $f : I \to \mathcal{S}^1$ de classe $\mathscr{C}^1$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ telle que $f = e^{i\theta}$.

Exercice 3 Soient $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ une fonction décroissante positive et $g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^c g(x)\mathrm{d}x.$$

Démontrer ce résultat lorsque la régularité de f n'est que $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

Exercice 4 Soit $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$. Calculer $I(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta$. Déterminer la limite de $I(x)$ quand $x \to \dfrac{\pi}{2}$.