

Colles de la semaine du 6 au 10 novembre 2017

Premières questions.

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos(2x)}{2} \\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2} \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x\end{aligned}$$

Deuxièmes questions.

1. Théorème des valeurs intermédiaires
2. Théorème de la bijection
3. Dérivées d'un produit, d'un quotient, de la réciproque

Troisièmes question.

1. courbe et dérivée de \sin , $|\sin x| \leq |x|$, limite de $\frac{\sin x}{x}$
2. courbe et dérivée de \tan , équation $\tan x = \tan \alpha$
3. courbe et dérivée de \exp , $e^x \geq x + 1$, limite de $\frac{e^x - 1}{x}$, croissances comparées
4. courbe et dérivée \ln , $\ln x \leq x - 1$, limite de $\frac{\ln x}{x - 1}$, croissances comparées.
5. $a > 0$, courbe(s) et dérivée de $x \mapsto a^x$.

Étude de dérivabilité :

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ avec $f(0) = 0$.
2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \cos^3(x^2) \sin^2(x^3)$.
3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Exercices

Exercice 1. Soit $f: \begin{cases} \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\sin x} \end{cases}$. Montrer que pour tout $x > 1$, $(f^{-1})'(x)$ existe et déterminer sa valeur en fonction de x .

Exercice 2. Soit $f: x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{e^x}{e^x - 1}$. Étude, réciproque.

Exercice 3. Discuter, selon la valeur de $\lambda > 0$, le nombre de solutions de l'équation

$$e^{\lambda e^{\lambda x}} = x \tag{E}$$

Exercice 4. Déterminer tous les entiers strictement positifs m et n vérifiant $n^m = m^n$.

Exercice 5. Montrer que $\forall x \geq 0$, $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

Exercice 6. Calculer $\tan \frac{\pi}{8}$.