Colles de la semaine du 27 novembre au 2 décembre 2017

Cours 1. Déterminer l'ensemble des solutions l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$.

Cours 2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = (x^2+1)e^{-x}$.

Cours 3. Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Montrer que les classes d'équivalence E pour $\mathcal{R}$ forment une partition de E.

Cours 4. Soit $f : E \to F$ une application et soient A_1, A_2 deux parties de E. Comparer $f(A_1 \cap A_2)$ et $f(A_1) \cap f(A_2)$. Y a-t-il égalité ?

Cours 5. Soit $f : E \to F$ une application et soient B_1, B_2 deux parties de F. Décrire $f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

Cours 6. Soit $f : E \to F$, soit B une partie de F. Comparer $f(f^{-1}(B))$ et B.

Exercice 1. Donner les solutions de $y'' + 9y = 0$. Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - xy' + 9y = 0 \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

Exercice 2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) + f(-x) = e^x.$$

Exercice 3. Soit $f : E \to F$ une application et soient $A \in \mathfrak{P}(E), B \in \mathfrak{P}(F)$. Comparer $f(A \cap f^{-1}(B))$ et $f(A) \cap B$.

Exercice 4. Soit $E = \{0,1\} \times \mathbb{Z}$. On munit E de la relation

$$(k,n) \leq_L (\ell, m) \qquad \Longleftrightarrow \qquad k < \ell \text{ ou } (k = \ell \text{ et } n \leq m)\,.$$

1. Montrer que l'on munit ainsi E d'une relation d'ordre. Est-elle totale ?
2. On rappelle que la borne supérieure d'une partie majorée est, lorsqu'il existe, le plus petit majorant. Exhiber une partie majorée de E pour $\leq_L$ n'admettant pas de borne supérieure.

Exercice 5. Soit J une partie non vide de $\mathbb{R}$. On définit la relation $\leq$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, J)$ par $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq g(x)$.

1. Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, J)$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur J pour que cette relation soit une relation d'ordre total.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur J pour que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, J)$ admette un plus grand élément.

Exercice 6. On considère le plan euclidien usuel P muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On le munit de la relation

$$\forall M_1, M_2 \in P, \qquad M_1 \mathcal{R} M_2 \quad \Longleftrightarrow \quad OM_1 = OM_2.$$

Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une classe d'équivalence. Décrire les classes d'équivalence.