Colles de la semaine du 26 au 30 mars 2018 – PCSI 2

Cours 1 Caractérisation des fonctions croissantes parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.

Cours 2 Théorème de la limite de la dérivée.

Cours 3 Coefficients d'un produit de deux polynômes ; conséquences : degré, coefficient dominant et coefficient constant d'un produit de deux polynômes, intégrité de $K[X]$.

Cours 4 Démontrer les résultats suivants :

— Soient $P \in K[X]$ et $a \in K$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
  1. a est une racine de P ;
  2. $X - a$ divise P dans $K[X]$.

— Soient $P \in K[X]$, $s \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \ldots, a_s \in K$ distincts. Les assertions suivantes sont équivalentes :
  1. Pour tout élément i de $[\![1, s]\!]$, a_i est une racine de P ;
  2. Le polynôme $\displaystyle\prod_{i=1}^{s}(X - a_i)$ divise P.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout polynôme de degré n admet au plus n racines.

Cours 5 L'ordre de multiplicité d'une racine a d'un polynôme P non nul étant défini comme le plus grand exposant k tel que $(X - a)^k | P$, démontrer l'équivalence des assertions suivantes :

1. a est une racine de P d'ordre de multiplicité m ;
2. $(X - a)^m$ divise P, mais $(X - a)^{m+1}$ ne divise pas P ;
3. Il existe $Q \in K[X]$ tel que $P = (X - a)^m Q$ et $\widetilde{Q}(a) \neq 0$.

Exercice 1 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant dont les racines complexes sont de parties imaginaires positives ou nulles. Montrer que $\mathrm{Re}(P)$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Exercice 3 Soit $a \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$.

Exercice 4 Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que si ξ est racine de P alors $|\xi| \leq 1 + \max\limits_{0 \leq k \leq n-1} |a_k|$.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ s'annulant en $n+1$ points distincts de I.

1. Montrer que la dérivée n-ième de f s'annule sur I.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la dérivée $(n-1)$-ième de $f' + \alpha f$ s'annule une fois sur I.

Exercice 6 Montrer que

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{n^2}.$$