Colles de la semaine du 2 au 6 avril 2018 – PCSI 2

Cours 1 Coefficients d'un produit de deux polynômes ; conséquences : degré, coefficient dominant et coefficient constant d'un produit de deux polynômes, intégrité de $K[X]$.

Cours 2 Démontrer les résultats suivants :

— Soient $P \in K[X]$ et $a \in K$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
1. a est une racine de P ;
2. $X - a$ divise P dans $K[X]$.

— Soient $P \in K[X]$, $s \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \dots, a_s \in K$ distincts. Les assertions suivantes sont équivalentes :
1. Pour tout élément i de $[\![1, s]\!]$, a_i est une racine de P ;
2. Le polynôme $\displaystyle\prod_{i=1}^{s}(X - a_i)$ divise P.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout polynôme de degré n admet au plus n racines.

Cours 3 L'ordre de multiplicité d'une racine a d'un polynôme P non nul étant défini comme le plus grand exposant k tel que $(X - a)^k | P$, démontrer l'équivalence des assertions suivantes :
1. a est une racine de P d'ordre de multiplicité m ;
2. $(X - a)^m$ divise P, mais $(X - a)^{m+1}$ ne divise pas P ;
3. Il existe $Q \in K[X]$ tel que $P = (X - a)^m Q$ et $\widetilde{Q}(a) \neq 0$.

Cours 4 Formule de Taylor pour les polynômes et, pour $a \in K$, unicité de l'écriture d'un polynôme comme combinaison linéaire de puissances de $X - a$.

Cours 5 Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine grâce aux polynômes dérivés successifs ; lien entre l'ordre de multiplicité d'une racine multiple de P et son ordre en tant que racine de P'.

Cours 6 Preuve de l'équivalence suivante, valable pour tout vecteur x d'un K-espace vectoriel E et tout scalaire λ :

$$(\lambda.x = 0_E) \iff [(\lambda = 0_K) \text{ ou } (x = 0_E)]\,.$$

Exercice 1 Soit $a \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$.

Exercice 2 Soit $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tel que $P^{(k)}(0) < 0$ pour tout $k \in [\![0, 2n+1]\!]$. Montrer que P a une racine réelle. Montrer que toutes les racines réelles de P sont strictement négatives.

Exercice 3 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Exercice 4 Déterminer une famille génératrice de $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 + \dots + x_n = 0\}$.

Exercice 5 À quelle condition $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{C}\}$ est-il un espace vectoriel ?

Exercice 6 L'ensemble $\{f \in \mathscr{C}^1([a, b]; \mathbb{R}),\ f'(a) = f'(b) = 0\}$ est-il un espace vectoriel ?