Colles de la semaine du 9 au 13 avril 2018 – PCSI 2

Cours 1 Formule de Taylor pour les polynômes et, pour $a \in K$, unicité de l'écriture d'un polynôme comme combinaison linéaire de puissances de $X - a$.

Cours 2 Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine grâce aux polynômes dérivés successifs ; lien entre l'ordre de multiplicité d'une racine multiple de P et son ordre en tant que racine de P'.

Cours 3 Preuve de l'équivalence suivant, valable pour tout vecteur x d'un K-espace vectoriel E et tout scalaire λ :

$$(\lambda.x = 0_E) \Longleftrightarrow [(\lambda = 0_K) \text{ ou } (x = 0_E)]\,.$$

Cours 4 Démonstration du fait que l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments d'une famille (finie) de vecteurs est un sous-espace vectoriel et du fait que l'on ne change pas le sous-espace vectoriel engendré par une famille $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ si l'on ajoute à l'un des vecteurs x_i ($i \in [\![1, p]\!]$) un multiple d'un autre, c'est-à-dire dire un vecteur de la forme λx_j avec $\lambda \in K$ et $j \in [\![1, p]\!] \backslash \{i\}$, ou plus généralement, un combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire un vecteur de la forme $\displaystyle\sum_{\substack{j \in [\![1,p]\!] \\ j \neq i}} \lambda_j x_j$, avec λ_j des scalaires.

Cours 5 Démonstration du fait que l'image directe ou réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel et démonstration du fait que la bijection réciproque d'une bijection linéaire est linéaire.

Cours 6 Définition du projecteur p sur un sous-espace F d'un espace vectoriel E parallèlement à un sous-espace G (supplémentaire de F dans E) et démonstration du fait qu'il s'agit d'un endomorphisme de E.

Exercice 1 Soit $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tel que $P^{(k)}(0) < 0$ pour tout $k \in [\![0, 2n+1]\!]$. Montrer que P a une racine réelle. Montrer que toutes les racines réelles de P sont strictement négatives.

Exercice 2 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Exercice 3 Déterminer une famille génératrice de $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 + \cdots + x_n = 0\}$. On pose $u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $F \oplus \mathrm{Vect}(u) = \mathbb{R}^n$.

Exercice 4 Peut-on déterminer $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que le vecteur $u = (-2, \lambda, \mu, 3)$ appartienne au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $a = (1, -1, 1, 2)$ et $b = (-1, 2, 3, 1)$.

Exercice 5 Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que si f et g commutent, alors $g(\mathrm{Ker}\, f) \subset \mathrm{Ker}\, f$ et $g(\mathrm{Im}\, f) \subset \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 6 On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$. On pose $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$. Soit $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(P) = R$, où R est le reste dans la division euclidienne de AP par B. Montrer que φ est un endomorphisme de E. Quelle est son noyau ? son image ?