Colles de la semaine du 30 avril au 4 mai 2018 – PCSI 2

Cours 1 Démonstration du fait que l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments d'une famille (finie) de vecteurs est un sous-espace vectoriel et du fait que l'on ne change pas le sous-espace vectoriel engendré par une famille $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ si l'on ajoute à l'un des vecteurs x_i ($i \in [\![1, p]\!]$) un multiple d'un autre, c'est-à-dire dire un vecteur de la forme λx_j avec $\lambda \in K$ et $j \in [\![1, p]\!] \backslash \{i\}$, ou plus généralement, un combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire un vecteur de la forme $\displaystyle\sum_{\substack{j \in [\![1,p]\!] \\ j \neq i}} \lambda_j x_j$, avec λ_j des scalaires.

Cours 2 Démonstration du fait que l'image directe ou réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel et démonstration du fait que la bijection réciproque d'une bijection linéaire est linéaire.

Cours 3 Définition du projecteur p sur un sous-espace F d'un espace vectoriel E parallèlement à un sous-espace G (supplémentaire de F dans E) et démonstration du fait qu'il s'agit d'un endomorphisme de E.

Cours 4 Démonstration du fait que si un endomorphisme p d'un espace vectoriel E vérifie $p^2 = p$, alors $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires dans E et p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Cours 5 Démonstration des résultats suivants :

1. Démonstration du théorème de caractérisation des familles liées : une famille d'éléments (au moins deux) d'un espace vectoriel est liée si, et seulement si, l'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres.
2. Démonstration du lemme du théorème de la base incomplète : « si $(x_1, \dots, x_n, x)$ est une famille liée d'éléments d'un espace vectoriel et si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, alors x est combinaison linéaire des x_i ($i \in [\![1, n]\!]$) » ou, de façon équivalente, « si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre et si x n'est pas combinaison linéaire des x_i ($i \in [\![1, n]\!]$), alors $(x_1, \dots, x_n, x)$ est libre ».

Cours 6 Démonstration du fait que toute famille de polynômes non nuls et de degrés distincts est libre.

Exercice 1 Déterminer une famille génératrice de $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 + \cdots + x_n = 0\}$. On pose $u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $F \oplus \operatorname{Vect}(u) = \mathbb{R}^n$.

Exercice 2 Peut-on déterminer $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que le vecteur $u = (-2, \lambda, \mu, 3)$ appartienne au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $a = (1, -1, 1, 2)$ et $b = (-1, 2, 3, 1)$.

Exercice 3 Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que si f et g commutent, alors $g(\operatorname{Ker} f) \subset \operatorname{Ker} f$ et $g(\operatorname{Im} f) \subset \operatorname{Im} f$. Montrer que si f est un projecteur alors la réciproque est vraie.

Exercice 4 Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $u^2 = 0$ si, et seulement si, il existe un projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u = p \circ u - u \circ p$.

Exercice 5 Soient $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in K$ tel que $g(x) = \lambda_x f(x)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $g = \lambda f$.

Exercice 6 Soit f un endomorphisme de E. Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ si, et seulement si, la restriction de f à $\operatorname{Im} f$ est un automorphisme de $\operatorname{Im} f$.