David Michel
david.michel@ens-rennes.fr
perso.eleves.ens-rennes.fr/people/David.Michel

Devoir surveillé 1 − 30 novembre 2016

Exercice 1

1. Écrire une fonction, d'en-tête

   function m = factorielle(n)

   qui à un entier n associe $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$.

2. Écrire une fonction d'en-tête

   function m = binomial(k,n)

   qui à des entiers k, n associe $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

3. Écrire un programme qui demande à l'utilisateur d'entrer un entier n et un entier $k \leq n$ puis calcule et affiche la somme $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}$.

Exercice 2

Rappels de mathématiques sur la dichotomie. Soient deux réels $a < b$ et une application continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que $f(a)f(b) < 0$. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante. On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Par récurrence, si a_n et b_n sont définit, on pose

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{et} \qquad p_n = f(a_n)f(c_n).$$

Alors,

— si $p_n < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$;
— si $p_n > 0$, on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$;
— si $p_n = 0$, on pose $a_{n+1} = b_{n+1} = c_n$.

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un réel $c \in [a, b]$ tel que $a_n \leq c \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f(c) = 0$.

1. Dans cette question on considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2$. Compléter le programme suivant pour qu'il calcule, en suivant l'algorithme ci-dessus, les termes successifs des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'à ce que $b_n - a_n < 10^{-8}$, puis écrit une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-8} près.

```
a=1
b=2
while
    c=
    p=
    if ...... then
                          //on modifie a et b de manière adéquate
    elseif ....... then
                         //on modifie a et b de manière adéquate
    else
                         //on modifie a et b de manière adéquate
    end
end
                         //on affiche une valeur approchée de √2
```

2. Écrire un programme qui calcule une valeur approchée à 10^{-6} près de l'unique réel $x > 0$ tel que $e^x = x + 2$.

Exercice 3

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. On peut montrer que pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $P_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x$. Le but de cet exercice est d'écrire un programme qui évalue $e^x - P_n(x)$.

1. On suppose que Scilab dispose d'une fonction **factorielle** comme celle de l'exercice 1, qui à un entier n associe $n!$. Écrire une fonction, d'en-tête

   function s = TRex(n,x)

   qui à un couple (n, x) associe le réel $P_n(x)$.
2. Réécrire la fonction **TRex** sans utiliser la fonction **factorielle**.
   On pourra remarquer que $\frac{x^k}{k!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \times \frac{x}{k}$ *et programmer une boucle **for** en utilisant une variable **y** et une variable **s** qui à chaque itération ont respectivement pour valeur* $\frac{x^k}{k!}$ *et* $\sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}$.
3. Écrire un programme qui demande à l'utilisateur d'entrer un entier $n > 0$ et un réel x, puis calcule et affiche les valeurs de e^x, $P_n(x)$ et $e^x - P_n(x)$.