

Devoir surveillé 2 – 1 mars 2017

Exercice 1 (EDHEC 2016)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par

$$\forall x \in [n, +\infty[, \quad f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt.$$

On peut montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $u_n \in [n, +\infty[$ tel que $f_n(u_n) = 1$.
On peut également montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}.$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n$.

1. À l'aide des résultats admis, compléter les commandes Scilab suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier n pour lequel v_n est inférieur ou égal à 10^{-4} .

```
n=0
while ...
    n = ...
end
disp(n)
```

2. Le script ci-dessus affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$. Préciser laquelle en prenant 2, 3 comme valeur approchée de $\ln 10$.

Exercice 2 (inspiré de EM Lyon 2015)

On définit la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^{-k}}{k^3}.$$

On peut montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel noté S et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |S - S_n| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}.$$

1. Écrire une fonction d'en-tête

function s = Somme(n)

qui prend en paramètre un entier n et renvoie la valeur de S_n .

2. Écrire un programme en Scilab qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Exercice 3

On suppose déjà définie dans Scilab une variable \mathbf{n} . Définir la matrice suivante dans Scilab :

$$A = \begin{pmatrix} 1^0 & 1^1 & 1^2 & \dots & 1^{n-1} \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 & \dots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^0 & n^1 & n^2 & \dots & n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Calculer, en une ligne, la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 1^0 & 1^2 & 1^4 & \dots & 1^{2n-2} \\ 2^0 & 2^2 & 2^4 & \dots & 2^{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^0 & n^2 & n^4 & \dots & n^{2n-2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

1. Écrire une fonction Scilab d'en-tête

function B = Transposee(A)

qui prend en paramètre une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et renvoie sa transposée tA . On supposera implicitement que A est une matrice carrée. On n'utilisera pas la commande de transposition prédéfinie dans Scilab.

2. Écrire une fonction Scilab d'en-tête

function B = Echange(A,i,k)

qui prend en paramètre une matrice A et des entiers i et k et renvoie la matrice B , copie de A dans laquelle on aura échangé les colonnes i et k :

$$A = (\text{Col}_1 | \dots | \text{Col}_{i-1} | \underline{\text{Col}_i} | \text{Col}_{i+1} | \dots | \text{Col}_{k-1} | \underline{\text{Col}_k} | \text{Col}_{k+1} | \dots | \text{Col}_p)$$

↓

$$B = (\text{Col}_1 | \dots | \text{Col}_{i-1} | \underline{\text{Col}_k} | \text{Col}_{i+1} | \dots | \text{Col}_{k-1} | \underline{\text{Col}_i} | \text{Col}_{k+1} | \dots | \text{Col}_p).$$