David Michel
david.michel@ens-rennes.fr
perso.eleves.ens-rennes.fr/people/David.Michel

ECE 1
Lycée Saint-Vincent
2016-2017

Devoir surveillé 3 – 17 mai 2017

Dans tout le sujet, X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que les variables X et Y sont **échangeables** si :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \qquad \mathbb{P}(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = \mathbb{P}(\{X=j\} \cap \{Y=i\}).$$

Résultats préliminaires

On peut montrer que :

1. si X et Y sont indépendantes et de même loi, alors elles sont échangeables ;
2. si X et Y sont échangeables, alors $\forall i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=i) = \mathbb{P}(Y=i)$.

Étude d'un exemple

Soient n, b et c trois entiers strictement positifs. Une urne contient initialement n boules noires et b boules blanches. On effectue l'expérience suivant, en distinguant trois variantes.

- On pioche une boule dans l'urne. On définit X la variable aléatoire qui vaut 1 si cette boule est noire et 2 si elle est blanche.
- On replace la boule dans l'urne et :
  - ⋆ Variante 1 : on ajoute dans l'urne c boules de la même couleur que la boule qui vient d'être piochée.
  - ⋆ Variante 2 : on ajoute dans l'urne c boules de la couleur opposée à celle de la boule qui vient d'être piochée.
  - ⋆ Variante 3 : on n'ajoute pas de boule supplémentaire dans l'urne.
- On pioche à nouveau une boule dans l'urne. On définit Y la variable aléatoire qui vaut 1 si cette seconde boule piochée est noire et 2 si elle est blanche.

$\boxed{\text{Q.1}}$ Compléter la fonction Scilab suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant b boules blanches et n boules noires et qui retourne 1 si la boule tirée est noire, et 2 si la boule tirée est blanche.

```
function res = tirage(b,n)
   r = rand()
   if ......... then
      res = 2
   else
      res = 1
   end
endfunction
```

$\boxed{\text{Q.2}}$ Compléter la fonction suivante, qui effectue l'expérience étudiée avec une urne contenant initialement b boules blanches, n boules noires et qui ajoute éventuellement c boules après le premier tirage, selon le choix de la variante dont le numéro est **variante**.

Les paramètres de sortie sont :

— **x** : une simulation de la variable aléatoire X

— **y** : une simulation de la variable aléatoire Y

```
function [x,y] = experience(b,n,c,variante)
   x = tirage(b,n)
   if variante == 1 then
      if x == 1 then
         ......
      else
         ......
      end
   else if variante == 2 then
      ......
      ......
      ......
      ......
      ......
   end
   y = tirage(b,n)
endfunction
```

$\boxed{\text{Q.3}}$ Compléter la fonction suivante, qui simule l'expérience N fois (avec $N \in \mathbb{N}^*$), et qui estime la loi de X, la loi de Y et la loi du couple (X, Y). Les paramètres de sortie sont :

— **loiX** : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime $[\mathbb{P}(X = 1), \mathbb{P}(X = 2)]$
— **loiY** : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime $[\mathbb{P}(Y = 1), \mathbb{P}(Y = 2)]$

— **loiXY** : un tableau bidimensionnel à deux lignes et deux colonnes qui estime :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) & \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 2\}) \\ \mathbb{P}(\{X = 2\} \cap \{Y = 1\}) & \mathbb{P}(\{X = 2\} \cap \{Y = 2\}) \end{bmatrix}.$$

```
function [loiX,loiY,loiXY] = estimation(b,n,c,variante,N)
   loiX = [0,0]
   loiY = [0,0]
   loi XY = [0,0;0,0]
   for k = 1:N
      [x,y] = experience(b,n,c,variante)
      loiX(x) = loiX(x) + 1
      ......
      ......
   end
   loiX = loiX/N
   loiY = loiY/N
   loiXY = loiXY/N
endfunction
```

*Indication : **loiX(x)** contient le nombre d'occurrences de l'entier **x** comme issue de l'expérience. Ainsi, lorsque l'on effectue une expérience dont l'issue est **[x,y]**, on ajoute 1 à **loiX(x)**. Il s'agit donc d'adapter ceci pour **loiY** et, plus subtilement, pour **loiXY**.*

$\boxed{\text{Q.4}}$ On exécute notre fonction précédente avec $b = 1$, $n = 2$, $c = 1$, $N = 10000$ et dans chacune des variantes. On obtient :

```
-->[loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,1,10000)
 LoiXY =
        0.49837  0.16785
        0.16697  0.16681
 LoiY =
        0.66534  0.33466
 LoiX =
        0.66622  0.33378

-->[loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,2,10000)
 LoiXY =
        0.33258  0.33286
        0.25031  0.08425
 LoiY =
        0.58289  0.41711
 LoiX =
        0.66544  0.33456

-->[loiX,loiY,loiXY] = estimation(1,2,1,3,10000)
 LoiXY =
        0.44466  0.22098
        0.22312  0.11124
 LoiY =
        0.66778  0.33222
 LoiX =
        0.66564  0.33436
```

En étudiant ces résultats, émettre des conjectures quant à l'indépendance et l'échangeabilité de X et Y dans chacune des variantes. On donne les valeurs numériques suivantes :

$$0.33 \times 0.33 \simeq 0.11$$

$$0.33 \times 0.41 \simeq 0.14$$

$$0.33 \times 0.58 \simeq 0.19$$

$$0.33 \times 0.66 \simeq 0.22$$

$$0.41 \times 0.66 \simeq 0.27$$

$$0.58 \times 0.66 \simeq 0.38$$

$$0.66 \times 0.66 \simeq 0.44$$